ELEMENTI
DELLE
PRINCIPALI PARTI
DELLE
MATEMATICHE.

ELEMENTI GENERALI
DELLE PRINCIPALI PARTI
DELLE
MATEMATICHE,
NECESSARJ ANCORA ALL' ARTIGLIERIA, E ALL' ARTE MILITARE.

Del Signor Abate DEIDIER,

Professor Regio di Matematiche nelle Scuole d' Artiglieria DE LA FERE.

TRADUZIONE DAL FRANCESE

DI ARDUINO, E MATTEO DANDOLO

NOBILI VENETI.

A SUA ECCELLENZA

SEBASTIAN GIUSTINIANO

SENATORE AMPLISSIMO.

TOMO PRIMO.

IN VENEZIA,

MDCCLXI.

APPRESSO MODESTO FENZO,

CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

ECCELLENZA.

Are a noi, nè certo senza ragione, che, sotto gli occhi cadendo de' Leggitori questa, qualunque ella siasi, nostra Italiana Traduzione, del Nome adorna e fregiata di V. E. subito vorran tut-

ti 'l motivo indagare, per cui Mecenate procacciato ci siamo di qualità cotanto rare, e sublimi. E non v' ha dubbio, che αὐτίκα solleverà ognuno lo sguardo allo Stemma dell' antichissima vostra Famiglia, la quale vantar può Origine Augusta, ed incominciare da quell' altezza di Rango, a cui μόγις per colmo τῆς μεγαλειότητος pochi giunsero finalmente dopo luminosissima Serie d' Antenati. Imperocchè, chi mai è, che non sappia, avere la Giustiniana Famiglia con lunga successsion di Virtù meritato di dare agli Eserciti formidabili Imperatori, Patriarchi Religiosissimi all' alto Seggio di Costantinopoli, saggi Dogi ornatissimi al Trono Real di Vinegia? Benchè più agevol sia noverare a Ciel sereno le stelle, che gli eccelsi vostri Progenitori ridire, i quali con assennati consigli ne' Gabinetti de' Principi, e con memorande Vittorie in Terra, ed in Mare, accrebbero splendore e gloria al Veneto Nome. A che però restrignerci alla Veneta Repubblica? E' cosa nota ed a ciascheduno palese, ch' il Sangue di loro conservossi infra noi, e ciò per favore quasi inaudito del Vaticano, non ad altro fine, siccome noi crediamo, se non perchè nel primo de' nostri Patriarchi al Cielo stesso i trionfi aggiugnesse, le Corone, le palme, e gli Eroi di

San-

Santità portentosa, onde vicinissimi al Trono del Sommo Iddio vegliassero in perpetuo sopra Venezia. Non va dunque lungi dal vero, nè male s' appone, chi pensa essersi da noi eziandio a cagione di vostra Famiglia appoggiata alla Protezione di V. E. l' Opera nostra: quantunque a dire la cosa com' è, il più valido e possente motivo siate voi stesso, l' amabili vostre obbliganti maniere, le vostre cospicue Virtù, ch' a ravvisarsi cominciando ne' dolcissimi vostri Figliuoli, d' ogni Arte adorni e d' ogni Scienza, presagiscono al Pubblico nuovo lustro, ed onore. Le vostre Virtù, torniamo a dire: quelle, che nella Patria vi fecero già, e vi faran mai sempre ne' più alti Posti di Grandezza risplendere. Ma tale e tant' è la Modestia, per cui vi distinguete infra tutti, ch' or la bocca ci chiude, e ci divieta di favellare più oltre dell' impareggiabile Merito e di Voi, e degl' insigni Fratelli vostri, i quali, la via appianandosi alle più eminenti Dignità, con vantaggio della Chiesa sostengono le Mitre di Trevigi, e Verona. Poichè dunque rigidamente volete, che null' altro nè di Voi, nè de' Vostri s' aggiunga, e che s' ommetta quel molto, che ci resterebbe da dire; aggiugneremo soltanto: ch' essendo di Matematica e d' Ar-

ti-

tiglieria la Traduzione, che del più rinomato Autore abbiam fatto; ella a V. E. ch' altre volte con immortal laude di tutti la Prefettura governò e sostenne d' Artiglieria, doveasi sopra ogni altro da noi offerire.

I TRA-

I TRADUTTORI
A CHI LEGGE.

E di quanto è avvenuto a proposito di questa Traduzion nostra si dee, cortesissimo Leggitore, per noi rendere qualche ragione, dobbiamo candidamente premettere: che siccome massima era la fama, che coll' insigne sua Opera, la quale meritossi approvazione dall' Accademia delle Scienze di Parigi, acquistata s'avea il dottissimo Sig. Abate DEIDIER, Regio Professore di Matematiche nelle Scuole d' Artiglieria *de la* FERE; così massimo ardea in noi 'l desiderio di leggerla, che per appagare non s' usò poca fatica, essendone già rarissimi divenuti gli Esemplari. S' ebbe finalmente, e si lesse da noi quest' Opera, e si rilesse con grande soddisfazione più fiate, nè però di leggerla ci stancavamo giammai, sempre più giudiziosa parendoci, amena, e fondata: ella disposta vedeasi ed ordinata con tanta facilità e chiarezza, che qualunque Uomo, il quale privo non fosse del senso comune, potrebbe colla sola di lei lettura agevolmente divenir Matematico. Non però noi, che null' affatto presumiam di noi stessi, ci fidavamo del nostro giudizio: si vollero pertanto consultare di quest' Arte i più ragguardevoli Professori, e trovossi, ch' essi aveano del Sig. Ab. DEIDIER stima anche maggiore. Anzi, a dire il fatto com'è, questi Professori medesimi in-

incominciarono a poco a poco a ſtimolarci di tradur l'Opera dalla Franceſe nell' Italiana favella ; dippoi con fervide replicatiſſime iſtanze a tradurla quaſi ci coſtrinſero , aſſicurandoci , che coſa utiliſſima per noi ſi farebbe all' Italia , giacchè la noſtra Lingua non ha ſenza dubbio Opera di Matematica, che queſta ſuperi .

Ora , ſe deeſi di tutta l'Opera dare in brieve qualche idea , diremo: ch' il celebre Autore incomincia 'l primo ſuo Libro da un Trattato, nel quale con indicibil chiarezza dimoſtra l' Operazioni Aritmetiche ſemplici e compoſte , il calcolo delle Frazioni , e l'eſtrazione delle Radici Quadrata e Cuba . Indi ſpiega l'Operazioni dell' Algebra; dimoſtra la ragione, per cui fu inventato queſto calcolo, l'uſo che farſene dee per la riſoluzione de' Problemi , il modo di riſolverli facilmente, e di conoſcere, ſe un' Equazione ſia del primo, ſecondo, o terzo grado, ec. Spiega in oltre il Metodo generale, onde ſe ne poſſa eſtrar la radice. Quel ch'è mirabile , e certamente da niuno praticato , ſi è la vaga rariſſima forma, onde trattanſi le Ragioni Aritmetiche e Geometriche , l' applicazione che ſe ne fa alla Regola del Tre diretta e indiretta , ſemplice e compoſta , a quella di Società , di Miſtione , ec. Le quiſtioni poi Numeriche , che v' aggiugne , tolgono affatto la noja , anzi le graviſſime difficoltà, che ſi ſogliono nella più parte de' Matematici incontrare . Oltre il Trattato de' Logaritmi , in cui nulla può deſiderarſi di più , mette quaſi ſotto gli occhi tutto ciò , ch' è neceſſario a ſaperſi nell' Aritmetica, e nell' Algebra : egli paſſa più oltre, perc-

rocchè dilucida e scioglie parecchie Quistioni, le quali son necessarie all' Architettura Militare.

Nel secondo Libro egli spiega coll' usata sua chiarezza la Geometria: ed in primo luogo con grandissimo acume d'ingegno considera le proprietà delle linee secondo le posizioni diverse, ch' aver possono, e tratta delle varie figure, che sono atte a formare. Esamina i rapporti che fra loro hanno secondo le maniere differenti, in cui si tagliano; ei discorre della linea circolare, ed espone gran numero di proprietà, che, sebbene dagli altri s'ommettino, conducono tuttavolta al perfetto intendimento delle Sezioni Coniche, le quali furon considerate mai sempre come la parte più astratta della Geometria. Spiega assai chiaramente i principj della Trigonometria; e dimostra l'uso, che farsene può sopra il terreno, a fine d'innalzare Piani e Carte, e misurare distanze accessibili, ed inaccessibili. Si trattiene di poi alcun poco a dimostrare la moltissima utilità, che d' essa può aversi nell' Arte della Guerra. Sparge nella Geometria quantità di Problemi, i quali, la Teoria unendo alla Pratica, dilettevole la rendono, e facilissima. Ometter vogliamo diverse cose, per non istancare i Leggitori; ma tacer non si può, che l' Autore, con incredibile utilità de Matematici, ha trovato nuovo chiarissimo Metodo per le Sezioni Coniche, senza di cui nulla mai stabilirassi di certo nell' Arte di tirar di Bomba, e Cannone.

Quantunque, come più volte s'è detto, metodo facilissimo usi da per tutto il nostro Autore; pure, ad oggetto di levare ogni ombra d'oscurità in alcu-

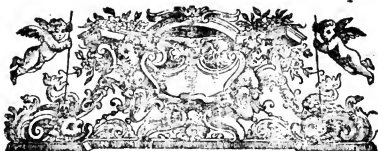
ni

ni Punti, che per natura loro astrusi sono a chi che sia, abbiamo pensato di non fare ingrata cosa a Lettori coll' aggiunta d' alcune brevi interessanti Annotazioni.

Nel Terzo ed ultimo Libro potrà a qualcuno sembrare, ch' il nostro Autore abbia procacciato di superare se medesimo; imperciocchè esamina e spiega minutamente l' Aritmetica degl' Infiniti, ch' è un' estensione di que' del Cavallerio: e questa, come sanno i Matematici, quella è, che dette origine a Calcoli novelli Differenziale, ed Integrale. Espone parte a parte la Meccanica, vogliam dire la scienza del Moto, ch' abbraccia le Regole de' differenti Movimenti, la Statica, o l' Equilibrio de' Corpi solidi, l' Idrostatica, o l' Equilibrio de' Corpi solidi, allorchè s' immergono ne' fluidi, l' Areometria, o la cognizione de' differenti cangiamenti, che soglion nell' Aria accadere, e l' Idraulica, o le Regole di dare movimento a fluidi.

Potrà eziandio parere, che 'l nostro Autore abbia studiato di distinguersi tra Matematici, e di fare, che l' Opera sua utile fosse ad ogni condizion di Persone, particolarmente agl' Ingegnieri di Guerra. Ed infatti con gran diletto e profitto de' Leggitori egli espone l' Arte dell' Artiglieria, e mostrando, su cui ella sia fondata, ci dà tanti lumi, che ognuno, come s' è detto, può agevolmente divenir Matematico.

Nel resto, leggendo l' Opera, si scorgeranno altre Dottrine, e s' avranno quelle cognizioni di Matematica, che nel solo accennarle saremmo troppo lunghi.

ELE-

ELEMENTI
DELLE PRINCIPALI PARTI DELLE MATEMATICHE.

LIBRO PRIMO,

Che contiene gli Elementi dell'Aritmetica, e dell'Algebra.

CAPITOLO PRIMO.

Diffinizioni, e Principj.

1. L'Aritmetica è la Scienza de'Numeri, o sia l'Arte di contare.

2. Ora, questa Scienza è talmente all'uomo necessaria, che non v'è Nazione, ch'immaginato non s'abbia de' caratteri per esprimere i differenti numeri, e per fare con facilità i Calcoli; ma perchè più comodi di tutti sembrarono i Caratteri dagli Arabi inventati, essi hanno finalmente portato il vanto, ed è molto tempo, che tutti i Popoli dell'Europa se ne servono, non solo nel commerzio, ma eziandio in quello spetta le Scienze, e le belle Arti.

3. Questi caratteri son dieci, come potete quì osservare. I nove primi esprimono i primi nove numeri, cioè *Uno*, *Due*, *Tre*, &c., e si chiamano *Unità*; poichè preso ciascheduno da se solo, non esprime senon unità. Il carattere *6*, per esempio, indica sei unità, e così si discorra degli altri. L'ultimo carattere 0, che chiamasi *zero*, niente per se significa, ma unito ad altri numeri è di grande utilità, come vedremo.

1, *Uno*
2, *Due*
3, *Tre*
4, *Quattro*
5, *Cinque*
6, *Sei*
7, *Sette*
8, *Otto*
9, *Nove*
0, *Zero*

4. Quando sopra una stessa linea scrivonsi molti di questi caratteri, essi cangiano di valore, secondo il posto, che occupano. Il primo a dritta ha valore d'unità; il secondo di decine, cioè vale dieci volte più di quello varrebbe, se fosse solo; il terzo diventa dieci volte ancora più grande, e vale in conseguenza delle centinaja, poichè dieci volte dieci fanno cento; il valore del quarto cresce di dieci volte più, e val mille, giacchè dieci volte cento fanno mille; il quinto vale delle decine di migliaja; il sesto delle centinaja di migliaja; il settimo de'milioni, e così per ordine, crescendo sempre i valori di dieci volte più, come apparisce dalla seguente Tavola.

Posto	Cifra
Trilioni.	4
Centinaja di milioni di bilioni.	5
Decine di milioni di bilioni.	6
Milioni di bilioni.	3
Centinaja di migliaja di bilioni.	5
Decine di migliaja di bilioni.	2
Migliaja di bilioni.	1
Centinaja di bilioni.	6
Decine di bilioni.	8
Bilioni.	7
Centinaja di milioni di migliaja di milioni.	5
Decine di milioni di migliaja di milioni.	6
Milioni di migliaja di milioni.	3
Centinaja di migliaja di migliaja di milioni.	2
Decine di migliaja di migliaja di milioni.	4
Migliaja di migliaja di milioni.	5
Centinaja di migliaja di milioni.	3
Decine di migliaja di milioni.	9
Migliaja di milioni.	5
Centinaja di milioni.	4
Decine di milioni.	2
Milioni.	5
Centinaja di migliaja.	7
Decine di migliaja.	8
Migliaja.	2
Centinaja.	3
Decine.	7
Unità.	5

Se si volesse continuare questa serie di numeri di là de' Trilioni, i carat-

caratteri seguenti si chiamerebbero decine di trilioni, centinaja di trilioni, migliaja di trilioni, decine di migliaja di trilioni, centinaja di migliaja di trilioni, quadrilioni, e così in infinito.

5. Mediante ciò, ch'abbiam detto, si potrà facilmente calcolare, e scrivere qualunque numero. Sia per esempio il numero 78567953; chiamo *unità* il primo carattere a destra, *decine* il secondo, *centinaja* il terzo, *migliaja* il quarto, *decine di migliaja* il quinto, il sesto *centinaja di migliaja*, il settimo *milioni*, e finalmente l'ottavo *decine di milioni*; ciò che mi fa comprendere, che ritornando da sinistra a dritta, il numero contiene sette decine di milioni, o sia settanta milioni, otto milioni, cinquecento mille, sei decine di migliaja, ovvero sessanta mille, sette mille, novecento, cinque decine d'unità, o cinquanta e tre; dal che inserisco, che questo numero vaglia in tutto settantotto milioni cinquecento sessantasette mille novecento cinquantatre.

Che se'l numero proposto contenesse un, o più zeri, ciò significherebbe, ch'esso non contiene le quantità, di cui gli zeri occupano il posto; per es. nel numero 780004, andando da dritta a sinistra, si vedrebbe, che si contengono quattro unità, non decine, nè centinaja, nè migliaja, ma otto decine di migliaja, e sette centinaja di migliaja; ed in conseguenza ritornando da sinistra a dritta, si leggerebbe settecento ottanta mille e quattro unità.

Parimente, se si volesse scrivere il numero tre milioni seicento quarantatre mille settecento cinquantadue, scriverebbesi prima un 3 pe' tre milioni, poi andando da sinistra a dritta scriverebbesi un 6 per li seicento mille, un 4 per i quaranta mille, un 3 per i tre mille, un 7 per i settecento, un 5 per i 50, e un 2 per le due unità; e s'avrebbe 3643752, cioè il numero ricercato.

Che se'l numero proposto fosse due milioni quaranta mille trecento trenta, scriverebbesi prima un 2 pe' due milioni, poi venendo da sinistra a dritta, metterebbesi un zero, giacchè il numero proposto non contiene alcun centinajo di migliaja, indi un 4 per i quaranta mille, poscia un zero, perchè il detto numero non contiene alcuna unità di migliaja, un 3 per i trecento, un 3 per i trenta, e finalmente un zero, perchè il numero proposto non contiene alcuna unità; e si avrebbe 2040330, e così degli altri; donde si vede, che occupandosi dal zero il posto delle quantità non contenute da un numero, esso conserva il luogo, e in conseguenza il valore di quelle, ch'egli contiene.

Ecco in che consiste tutto l'artifizio degli arabi caratteri, artifi-

zio, che si può considerare, come una delle più belle invenzioni dell' umano spirito, poichè col mezzo di dieci semplicissimi caratteri non solo si viene a capo di scrivere comodissimamente qualsisia numero; ma possiamo in oltre fare sopra i numeri tutte l'operazioni necessarie, secondo la varietà de' casi, ne' quali ci troviamo.

6. I numeri per se stessi sono idee astratte, che hanno un valore fisso, e costante, ma che niente significano di determinato. Per esempio, il numero 20 vale sempre venti unità, o due decine, senza esprimere piuttosto venti uomini, che venti cavalli, o venti scudi, ec. E perciò, quando si vuole determinare la significazione de' numeri, bisogna necessariamente scriver appresso di loro ciò, che vogliamo, che significhino; così per esprimere 20 luigi, non basta, ch'io scriva 20, ma bisogna, che vi aggiunga la parola *luigi*; e si faccia il simile in altri casi.

7. I numeri, che hanno la lor significazione determinata, ponno essere della *stessa*, o di *differente spezie*, secondo che le cose per essi significate sono della stessa, o di differente natura: *9* scudi e 8 scudi sono numeri della *stessa spezie*, *9* scudi e *9* pertiche sono numeri di *differente spezie*.

8. L'uso ha fatto, che si dividano, e suddividano certe cose; come per esempio la lira è stata divisa in 20 parti nominate soldi, e 'l soldo in 12 parti, o sia denari. Similmente, la pertica è stata divisa in sei parti, o piedi; il piede in 12 parti, o pollici; il pollice in 12 parti, o linee; e la linea in 12 parti, o sia punti; e così di moltissime altre cose. Queste suddivisioni chiamansi *sottospezie*; quando si dice una lira sei soldi quattro denari, i sei soldi e i quattro denari sono *sottospezie* della lira.

9. Ogni numero, o abbia la sua significazione determinata, non l'abbia, è sempre *intero*, o *rotto*, che altrimenti si chiama *frazione*. Un numero *intero* è quello, che per se stesso non ci dà l'idea d'un tutto, di cui egli sia parte; l'unità, e tutti i numeri maggiori dell'unità sono di tal natura; perciocchè supposto, che si dica 2, o 2 scudi, da questo numero 2 non si ha, che l' idea di due unità, o di due scudi senz'alcun rapporto a qualunque altro numero, di cui queste due unità, o questi due scudi sieno parte: per lo contrario il numero *rotto*, o la *frazione* è un numero, che porta seco l'idea d'un tutto, o d'un' intero, di cui esso non è ch' una parte; tali sono tutti que' numeri, che diconsi un *terzo*, un *quarto*, un *quinto*, un *sesto*, ec. poichè gli stessi ci rappresentano sempre l' idea d'un tutto, o d'un' intero maggiore di essi.

Quin-

Quindi ne segue, che ciò, che propriamente si dice frazione, è sempre minore del tutto, o dell'intero, di cui essa è parte; e che se talora s'adoperano quest'espressioni, *tre metà*, *quattro terzi*, ec. le quali indicano numeri maggiori del loro tutto, od intero, esse sono frazioni *impropriamente dette*; imperocchè, invece di tre metà, dovrebbesi dire, parlando acconciamente, uno e mezzo; essendo lo stesso dire tre metà, come dire due metà, cioè un' intero, od un tutto, più una metà di lui; e così dell'altre.

10. I numeri ancora si dividono in *semplici*, e *composti*; il numero *semplice* è quello, che contiene ciò, ch' è della medesima spezie; 20 unità, o 20 scudi è un numero semplice, perchè non contiene se non 20 unità della stessa natura, o 20 scudi; così ancora tre quarti è un numero semplice, perchè contiene delle parti d'un' intero della medesima spezie. Il numero *composto* è un numero, che contiene delle sottospecie; 20 e un quarto è un numero composto, poichè contiene venti unità ed un quarto di unità, ovvero una suddivisione d'unità. Anche 20 lire 4 soldi è un numero composto, perchè oltre le lire contiene de' soldi, cioè delle sottospezie della lira. S'abbia l'avvertenza di non chiamare numeri *composti*, se non quelli, che sono formati di spezie e di sottospezie, o sia d'unità e di frazioni di queste stesse unità; 20 scudi, e 3 pertiche, come anche 20 soldi, e tre quarti di pertica non sono numeri composti.

11. Le principali operazioni dell' Aritmetica sono la *Somma*, o *Addizione*, la *Sottrazione*, la *Moltiplicazione*, e la *Divisione*.

Il *sommare* altro non è, che unire insieme due, o più numeri della medesima spezie; e ciò dicesi *somma*.

Il *sottrarre* è il togliere un numero da un' altro numero della spezie medesima; quello, che resta dopo fatta l' operazione, si dice *Residuo*, o *Differenza*; giacchè altro non è la differenza di due numeri disuguali, che ciò, che resta, dopo levato dal maggiore il minore.

Il *moltiplicare* consiste in pigliare un numero tante volte, quante sono l'unità, che si contengono nel numero, che lo moltiplica. Se si moltiplica 2 per 3, si piglia il due tante volte, quante sono l'unità, che si contengono nel tre, cioè si piglia tre volte; così il 2 si dice il *Moltiplicando*, il 3 il *Moltiplicatore*, e'l *6*, che nasce dalla moltiplicazione del moltiplicando col moltiplicatore, dicesi il *Prodotto*. Tanto si può prendere il moltiplicando pel moltiplicatore, come il moltiplicatore per lo moltiplicando; imperciocchè, o si moltiplichi

tiplichi 2 per 3, o si moltiplichi 3 per 2, il prodotto sarà sempre *6*.

Per *dividere* s'intende togliere un numero da un'altro tante volte, quante esso vi è contenuto. Quando dividesi *6* per 2, si cerca quante volte il 2 è contenuto nel *6*; così il *6* si dice il *Dividendo*, il 2 dicesi 'l *Divisore*; e'l numero 3, il quale esprime il numero delle volte, che 'l Divisor 2 è contenuto nel Dividendo *6*, chiamasi il *Quoziente*.

12. In questi quattro modi si può operare sopra i numeri interi, e rotti, semplici, e composti. Nel seguente Capitolo spiegheremo l'Addizione, e la Sottrazione de'numeri interi semplici e composti, e la Moltiplicazione, e Divisione de' numeri interi semplici. Ne' susseguenti Capitoli poi parleremo del modo di fare queste stesse operazioni sopra le frazioni; e della Moltiplicazione, e Divisione composta.

A S S I O M A.

13. Il tutto è uguale alle sue parti prese insieme. Le parti del numero 5 sono 2, e 3; ognun vede, che sommando 2, e 3, s' avrà 5 uguale al numero 5 composto di queste due parti.

CAPITOLO SECONDO,

In cui si spiegano le prime quattro Regole dell'Aritmetica.

ADDIZIONE SEMPLICE.

14. PER sommare molte grandezze semplici, si dispongono in maniera tale l'une sotto l'altre, che l'unità si trovino sotto l'unità, le decine sotto le decine, le centinaja sotto le centinaja, ec. poi si opera, come vedesi nel seguente Esempio.

ESEM-

ESEMPIO. *Vi sono in un' Esercito* 4538 *Fanti*, 1519 *Carabinieri*, 3323 *Soldati a Cavallo*, e 2242 *Dragoni*; *si ricerca quanti sieno in tutti?*

4538	*Fanti.*
1519	*Carabinieri.*
3323	*Soldati a Cavallo.*
2242	*Dragoni.*
Somma 11622	*Uomini.*

Dopo aver disposti questi numeri, come s'è detto di sopra, comincio dalla fila a destra, e sommo tutti i numeri, che in essa si contengono, dicendo: i numeri 8, 9, 3, e 2 fanno 22, vale a dire due decine, e due unità; e siccome questa fila non può contenere, che le sole unità, così io tiro una linea, e scrivo 2 sotto questa fila, portando le due decine nella fila seguente.

Passo alla seconda fila, e dico: il numero 2, che porto, con i numeri 3, 1, 2, e 4 fanno 12, vale a dire dodici decine, o cento più due decine; e siccome questa fila non può contenere, che le sole decine, così di sotto io scrivo 2, ovvero due decine, portando un centinajo nella fila seguente.

Passo a questa terza fila, e dico: il numero 1, che porto, coi numeri 5, 5, più 3, e 2 fanno 16, cioè 16 centinaja, od un migliajo, e sei centinaja; e siccome questa fila non può contenere, che le sole centinaja, così io scrivo sotto 6, e porto un migliajo nella fila che segue.

Dico adunque: i numeri 1, 4, 1, 3, e 2 fanno 11, vale a dire undecimille, ovvero una decina di migliaja, ed un migliajo: pongo 1 sotto questa fila, e scrivo l'1, o decina di migliajo, che avanza, un posto più innanzi a sinistra; e la somma totale è 11622.

La Dimostrazione n'è per se evidente; essendo manifesto, ch'operando in tal modo, io formo un' intero, che comprende tutti i numeri proposti: ora l'intero è uguale a tutte le sue parti prese insieme (*N.*13.); dunque l'intero trovato è uguale a tutte le sue parti prese insieme.

15. Si danno molti metodi, onde vedere, se facendo la Somma ci siamo ingannati; ma quello, ch'io giudico il migliore, si è di ricominciare l'operazione, sommando ciascuna fila dal basso all'alto, e non dall' alto al basso, come abbiam fatto; si dirà dunque: i numeri 2, 3, 9, e 8 fanno 22; e si vedrà, che scrivendo 2 sotto questa fila, e portando due decine nella fila seguente, non abbiam errato: quindi con questo metodo potremo facilmente scoprire, se nel fare l'operazione s'è da noi commesso qualche fallo.

AD-

ADDIZIONE COMPOSTA.

16. L'Addizione composta si fa scrivendo ogni sottospezie sotto la sottospezie simile, ed operando, come ora vedremo.

ESEMPIO. *Quattro debitori hanno dato ad un lor creditore, il primo 365 lire 15 soldi 11 denari, il secondo 432 lire 14 soldi 10 denari, il terzo 534 lire 19 soldi 9 denari, e'l quarto 635 lire 18 soldi 10 denari; cosa in tutto avrà da essi ricevuto il Creditore?*

	lir.	sol.	den.
	365	15	11
	432	14	10
	534	19	9
	635	18	10
	lir.	sol.	den.
Somma	1969	9	4

Dopo scritti questi numeri, com'è stato insegnato, comincio dai denari, e siccome per fare un soldo se ne ricercano 12, così io dico: 11, e 10 fanno 21, vale a dire un soldo, e nove denari; metto un punto accanto al dieci, per denotare che ho un soldo, e continuo dicendo: 9 denari, che ho, oltre un soldo, e 9, che vengon dopo, fanno 18, cioè un soldo, e 6 denari; metto un punto accanto al 9, per dinotare che ho ancora un soldo, e dico: 6 denari, che ho, oltre un soldo, e 10 fanno 16, ovvero un soldo, e quattro denari; pongo un punto accanto 'l 10, e scrivo 4 sotto la linea.

Ora, dandomi a conoscere i tre punti da me segnati, che ho tre soldi, porto questi nella fila de' soldi, e dico: i numeri 3, 5, 4, 9, e 8 fanno 29, o sia due decine, e nove soldi; scrivo 9 sotto la linea, e porto 2 nel posto delle decine, dicendo: i numeri 2, 1, 1, 1, e 1 fanno 6 decine; ora, per fare una lira se ne ricercano 2; piglio adunque la metà di 6, ch'è 3, ed ho in conseguenza tre lire; e siccome non mi avanza alcuna decina, così nulla scrivo sotto 'l posto delle decine ne' soldi.

Porto le dette lire 3 nella fila delle lire, dicendo: i numeri, 3, 5, e 2 fanno 10, ec. e continuando l'operazione, come nel precedente esempio, ho la somma totale ricercata.

Se in vece di 6 decine di soldi, avessi avuto un numero dispari, come 7, avrei preso la metà di 7, ch'è 3 lire, ed avrei portato 3 nella fila delle lire; ma siccome sarebbemi avanzata una decina, così io avrei scritto 1 sotto 'l posto delle decine de' soldi. Ciò che non ha bisogno di Dimostrazione.

SOT-

SOTTRAZIONE SEMPLICE.

17. PRIMO ESEMPIO. *Vi sono in una Piazza 9586 uomini; se da essa ne faciamo sortire 4374, quanti ne resteranno?*

Scrivo 'l numero minore sotto 'l maggiore, disponendo l'unità sotto l'unità, le decine sotto le decine, ec. e tirando sotto una linea, comincio a destra, e dico: da *6* sottratto 4, avanza 2, ch' io scrivo sotto la linea; da 8 sottratto 7, avanza 1, ch'io scrivo, come sopra; faccio lo stesso nell' altre file, e trovo, che nella Piazza resteranno 5212 uomini.

```
9586
4374
5212 Residuo.
9586 Prova.
```

18. La prova del sottrarre si fa unendo insieme il residuo col numero degli uomini, che si vogliono far sortire; e se la somma trovasi uguale al numero degli uomini, ch'erano nella Piazza, la regola è esatta; essendo manifesto, che la somma totale altro non è, che 'l numero degli uomini, i quali escono, unito al numero di que', che restano.

Siccome l'Addizione serve di prova alla Sottrazione, così anche la Sottrazione serve di prova all'Addizione; imperocchè, se nell' esempio portato i 4374 uomini, che debbono sortire, uniti a' 5212, che debbon restare, fanno la somma *9586*; è evidente, che sottratto da questa somma il numero 4374, il residuo esser dee 5212, e sottratto parimente dalla detta somma *9586* il numero 5212, il residuo dee essere 4374; che se facendo l'una, o l'altra di queste Sottrazioni, non si trovasse l'uno, o l'altro di questi due residui, sarebbe segno, che l'Addizione è mal fatta.

II. ESEMPIO. *Un uomo ha soddisfatto con 70082 lire, che ha avuto in pagamento, un debito di 58765 lire; quanto gli resta?*

Scrivo questi numeri, come sopra ho insegnato, e dico: da 2 non posso sottrar 5; prendo perciò in prestito una decina dal posto delle decine, e metto un punto sopra l'8, per dinotare che non valerà più di 7; dico adunque: una decina, che ho preso in prestito, e due unità fanno 12 unità; da 12 levo 5, e scrivo il residuo 2 sotto la linea; passo alle decine, e dico: da 7, sottratto *6*, avanza 1, ch'io scrivo, come sopra; da 0 non posso toglier 7, e però

```
 · · ·  lire
70082   lire
58765
        lire
11317
```

piglio in prestito un'unità dal posto seguente, ma perchè esso non ne ha, io passo all'altro, su cui metto un punto; ora, l'unità di questo posto hanno valore di decine di migliaja, e perciò l'unità, che ho preso in prestito, vale diecimille; ma perchè il numero diecimille è troppo grande per sottrar 7, o 7 centinaja dal posto, in cui deggio operare, così lascio 9 mille nel posto delle migliaja, mettendo un punto sopra 'l zero di questo posto, per dinotare ch' esso valerà nove, e non mi avanza ch'un migliajo, o dieci centinaja; dico adunque: da 10 centinaja sottraendo 7, avanza 3, ch'io scrivo sotto la linea; da 9 sottraendo 8, avanza 1; e finalmente da 6 sottraendo 5, avanza 1; e in conseguenza a quest' uomo restano 11317 lire. La regola, che s' insegna, quando trovansi molti zeri ne' posti, da' quali si vuole torre in prestito, è questa: Si passa di posto in posto, sin tanto che s' arriva a quello, in cui trovansi dell' unità, si mettono de' punti sopra questo posto, e sopra gli zeri di quelli, da' quali non si ha potuto prender in prestito, e si fa valer 9 ognuno di questi zeri.

Così per sottrarre 3542 da 6001, si dirà: da 1 non posso sottrar 2, e perciò prendo in prestito una decina; ma perchè non ne ha, nè il posto delle decine, nè quello delle centinaja, passo a quello delle migliaja, e tolgo in prestito un migliajo, o sia 10 centinaja; e siccome dieci centinaja sono troppo grandi, perchè non si possa torre da loro che 2 unità, così io lascio 9 centinaja nel posto delle centinaja, e 9 decine del centinajo, che avanza, in quello delle decine; e non avanzerà che una sola decina, la quale congiunta all'unità, che ho, farà 11; si dirà adunque: da 11 sottratto 2, avanza 9; da 9 sottratto 4, avanza 5; da 9 sottratto 5, avanza 4; e da 5 sottratto 3, avanza 2.

```
 ...
6001
3542
----
2459
```

SOTTRAZIONE COMPOSTA.

19. PRIMO ESEMPIO. *Un uomo ha 986 lire, 15 soldi, 8 denari, e vuole pagare un debito di 754 lire, 9 soldi, 6 denari; cosa gli resterà?*

Scrivo 'l numero minore sotto 'l maggiore, i denari sotto i denari,

nari, i soldi sotto i soldi, ec. e dico: da 8 denari sottratti *6*, avanzano 2; da 15 soldi sottratti *9*, avanzano *6*; da *6* lire sottratte 4, avanzano 2, e seguitando ad operare, come ho fatto nella Sottrazione semplice, trovo, che gli resteranno 232 lire, *6* soldi, 2 denari.

lir.	sol.	den.
986	15	8
754	9	6
232	6	2

II. ESEMPIO. *Da 9600 lire, 8 soldi, 6 denari si vogliono levare 7564 lire, 12 soldi, 10 denari; quale sarà il residuo?*

Dopo scritti questi due numeri, come altre volte ho insegnato, dico: da *6* non posso sottrar 10; onde pigliando in prestito dalla fila de' soldi un soldo, o sia 12 denari, sommo questi a' *6*, che ho, e mi danno 18; da 18 tolgo 10, e mi avanzano 8 denari.

lir.	sol.	den.
···9600	8	6
7564	12	10
2035	15	8

Passo alla fila de' soldi, e siccome da 7 non posso sottrar 12 così io piglio in prestito dal posto dell'unità di lire una lira, o 20 soldi; ma non vi trovando nè unità, nè decine, passo a torre in prestito un centinajo dal posto delle centinaja, e vi metto un punto; lascio *9* decine di questo centinajo nel posto delle decine, ponendo un punto sopra 'l zero, per indicare che valerà *9*; lascio *9* unità della decina, che avanza, nel posto dell'unità, mettendo un punto sul zero di questo posto, e mi avanza un'unità di lire, o 20 soldi, i quali sommati a' 7, che ho, fanno 27; e da 27 sottraendo 12, avanza 15.

Passo alle lire, e dico: da *9* sottraendo 4, avanza 5; da *9* sottraendo *6*, avanza 3; da 5 sottraendo 5, avanza 0; e da *9* sottraendo 7, avanza 2.

III. ESEMPIO. *Un uomo è debitore di 90000 lire, e ne paga 75432, 12 soldi, 6 denari; cosa gli resta a pagare?*

Dispongo i due numeri, come sopra, e poichè nel numero superiore non vi sono nè soldi, nè denari, nè unità di lire, nè decine, nè centinaja, nè migliaja, così io piglio in prestito dal *9* una decina di migliaja; di questa decina ne lascio *9* mille

lir.	sol.	den.
····90000		
75432	12	6
14567	7	6

al posto delle migliaja, ponendo un punto sopra 'l zero di questo posto; del migliajo, che avanza, lascio 9 cento al posto delle centinaja, 9 decine al posto delle decine, e 9 unità al posto dell' unità, ponendo tre punti sugli zeri di questi posti: dopo ciò mi avanza una lira, o sia venti soldi; ora per passare a' denari non m'occorre che un soldo, o 12 denari, e però lascio 19 nella fila de' soldi, servendomi d' un punto per significarlo; quindi io dico: da un soldo, che mi avanza, o da 12 denari togliendone 6, ne avanzano 6; da 19 soldi togliendone 12, n' avanzano 7; da 9 lire togliendone 2, n' avanzano 7; da 9 sottratte 3, avanzano 6; da 9 sottratte 4, avanzano 5; da 9 sottratte 5, avanzano 4; e da 8 sottratte 7, avanza 1; quest'uomo adunque resta ancora debitore di 14567 lire, 7 soldi, 6 denari.

MOLTIPLICAZIONE SEMPLICE.

20. PRIMO ESEMPIO. *Quanto costano 36 braccia di stoffa a 4 lire il braccio?*

Poichè un braccio vale 4 lire, 36 braccia valeranno 4 volte 36, cioè mi converrà prender 36 quattro volte, ovvero tante volte, quante sono l' unità, che si contengono nel 4; ecco adunque una moltiplicazione (*N.* 11.).

Scrivo prima le 36 braccia, o sia il numero da moltiplicarsi, e poi scrivo il moltiplicator 4 sotto l' unità 6 del numero 36; indi tiro una linea, e dico: 4 volte 6 fanno 24, cioè 2 decine, e 4 unità; scrivo 4 unità sotto la linea, e riserbando 2 decine, dico: 4 volte 3 decine fanno 12, più 2, che ho, uguale 14; scrivo 4 sotto le decine, e faccio passar l' 1, che avanza, nel posto delle centinaja; e trovo, che le 36 braccia di stoffa a 4 lire il braccio costano 144 lire.

	brac. 36
	lir. 4
Prodotto	lir. 144

Ciò è per se evidente: basta solo riflettere, che tanto è il numero 36, come sono 3 decine, e 6 unità; ora, moltiplicando 6 unità e 3 decine per 4, ho preso 6 unità, e 3 decine tante volte, quante sono l' unità, che si contengono nel 4. Ho preso adunque il numero 36 tante volte, quante sono l' unità, che si contengono nel 4, ed ho conseguentemente fatto la moltiplicazione ricercata (*N.* 11.).

II. ESEM-

II. ESEMPIO. *Un uomo ha fatto 236 pertiche di lavoro a 28 lire la pertica; quanto importa quest' opera?*

Valendo una pertica 28 lire, mi converrà, per avere il valor delle 236 pertiche, prender 236 ventotto volte, ovvero tante volte, quante sono l'unità, che si contengono nel 28. Scrivo per tanto di sopra il numero da moltiplicarsi 236, e di sotto il Moltiplicatore 28, ponendo l'unità sotto l'unità, e le decine sotto le decine; dopo ciò moltiplico il numero 236 per l'unità 8 del moltiplicatore, ed ho 1888; indi moltiplico il numero 236 per le 2 decine del moltiplicatore, dicendo: 2 volte 6 fanno 12, cioè 12 decine, giacchè il moltiplicator 2 ha significazione di decine; scrivo adunque 2 decine sotto l'8 decine del primo prodotto 1888, e ritengo 1; due volte 3 fanno 6, più 1, che ho ritenuto, uguale 7, e scrivo 7; 2 volte 2 fanno 4, e scrivo 4; così questo secondo prodotto è 472; sommo i due prodotti 1888, e 472, nella maniera, che sono disposti, cioè scrivo prima 8, poi dico: 8, e 2 fanno 10; scrivo 0, e ritengo 1; 1, che ho ritenuto, più 8, più 7 fanno 16; scrivo 6, e ritengo 1; 1, che ho ritenuto, più 1, più 4 fanno 6; scrivo 6, e 'l prodotto totale 6608 è 'l valore delle 236 pertiche.

```
 236 pert.
  28 lire
 ----
1888
472
----
6608
```

Per comprenderne la ragione, si consideri, che tanto è il moltiplicatore 28, come sono 2 decine, e 8 unità. Ora, moltiplicando 236 per 8, ho preso questo numero tante volte, quante sono l'unità, che si contengono nell'8; e moltiplicandolo per 2 decine, l'ho preso 2 decine di volte; perciocchè avendo scritto il prodotto un posto più innanzi a sinistra, ei viene a valere dieci volte più di quello varrebbe, se non l'avessi fatto passare innanzi.

Ho preso adunque il numero 236 2 decine di volte più 8, cioè 28 volte, ed ho fatto in conseguenza la moltiplicazione domandata; laonde sommando i due prodotti senza cangiare ad alcuno il loro posto, ho necessariamente avuto il prodotto totale.

21. Si suole, per far comodamente la moltiplicazione, portare una certa Tavola, chiamata dal nome del suo Autore *la Tavola Quadrata di Pitagora*. Ella si forma facendo un gran quadrato, il quale dividesi in dieci parti uguali da sinistra a dritta, e in altrettante parti dall'alto al basso; sicchè tutto'l quadrato trovasi diviso in 100 piccioli quadrati, ovvero cellette, come quì si vede.

Nelle

Tavola di Pitagora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Nelle dieci cellette a finiſtra dall' alto al baſſo ſcrivonſi i numeri 1, 2, 3, ec. fino al dieci, e ſi fa lo ſteſſo nelle 10 cellette ſuperiori da ſiniſtra a dritta; indi in quelle della ſeconda fila dall' alto al baſſo, il cui primo numero è 2, ſcrivonſi i numeri 2, 4, *6*, ec. creſcendo ſempre di 2; in quelle della terza dall'alto al baſſo, che principia dal *3*, ſcrivonſi i numeri *3*, *6*, *9*, 12, ec. creſcendo ſempre di *3*; in quelle della quarta dall'alto al baſſo, che comincia dal 4, ſi ſcrivono, creſcendo ſempre di 4, i numeri 4, 8, 12, ec. ed oſſervando l'iſteſſo ordine nell'altre file dall'alto al baſſo, s'avrà la Tavola ricercata.

L'uſo, che ſe ne fa, è queſto: Se voglio, per modo d'eſempio, ſapere coſa faccia *6* volte *7*, cerco nella prima fila dall' alto al baſſo a ſiniſtra la celletta, in cui ſi trova ſcritto il *6*, e nella fila ſuperiore da ſiniſtra a dritta cerco quella celletta, in cui trovaſi 'l *7*. Dopo ciò ſcorrendo con gli occhi le file, che incominciano dal *6*, e dal *7*; l'una, che va da ſiniſtra a dritta, e l'altra, che va dall'alto al baſſo, trovo, che la celletta, in cui eſſe ſi tagliano, contiene 42; il che mi moſtra, che *6* volte *7* fanno 42: ciò è evidente per la coſtruzione della Tavola; perocchè formando la fila dall'alto al baſſo, che comincia dal *7*, la ſeconda celletta contiene 2 volte *7*, o 14; la terza *3* volte *7*, o 21, ec. talmente che la ſeſta, la quale corriſponde alla fila da ſiniſtra a dritta, che comincia dal *6*, dee neceſſariamente contenere *6* volte *7*, o ſia 42.

Così ancora, ſe voleſſi ſapere il prodotto di *7* per *9*, prenderei la fila da ſiniſtra a dritta, che comincia dal *7*, e quella dall'alto al baſſo, che comincia dal *9*; e'l ſito, in cui eſſe ſi taglierebbero, conterrebbe *63*, ch'è il prodotto di *7* per *9*; e così degli altri.

22. La prova del moltiplicare ſi fa col dividere, operazione affatto alla moltiplicazione contraria, come ſarà facile il vedere.

DIVI-

DIVISIONE SEMPLICE.

23. PRIMO ESEMPIO. *Io voglio dividere a 3 de' miei Soldati 69 lire; quanto dovrò dare a ciascun di loro?*

Ognun vede, che per far ciò mi conviene dividere *69* per *3*, ed esaminare, quante volte esso si trova in *69*; imperocchè se trovasi 23 volte senza residuo, io potrò con verità asserire, che 23 preso tre volte è uguale a *69*, poichè 'l tutto è uguale alle sue parti prese insieme (*N.* 13.); e così ogni Soldato avrà 23 lire di sua porzione, che s'appella dividere (*N.* 11.).

Scrivo per tanto il numero *69* da dividersi, e 'l divisor 3 sopra il di lui primo carattere a sinistra; indi tiro due linee: l'una sotto 'l *69*, e l'altra a destra per distinguere il dividendo dal quoziente, che porrò accanto a questa linea. Ciò fatto, dico: il 3 quante volte entra nel *6*? e perchè v'entra 2 volte, scrivo 2 al quoziente, e dico: 2 volte 3 fanno *6*, e sottratto *6* dal carattere *6* del dividendo, nulla avanza. Scrivo sotto la linea, direttamente sotto al divisore, l'altro carattere *9* del dividendo, e dico: il 3 quante volte entra nel *9*? e perchè vi entra 3 volte, scrivo 3 al quoziente, e dico: 3 volte 3 fanno *9*; levo *9* dal carattere *9* del dividendo, e nulla resta; e rimanendo il dividendo senza caratteri, l'operazione trovasi fatta; io darò adunque 23 lire a ciascun soldato.

```
3
69(23
9
```

La ragione è chiarissima; basta solo considerare, che quando, nel fare la prima operazione, ho detto: il 3 quante volte entra nel *6*? ho avuto per quoziente 2 decine, o sia 20; imperocchè *6* decine contengono 3 venti volte, ovvero due decine di volte; così moltiplicando il divisor 3 per lo primo quoziente 2, il che fa *6* decine, e sottraendo dal dividendo queste *6* decine, non vi sono restate che *9* unità. Ora, avendo trovato mediante la seconda operazione, che 'l divisore entra 3 volte in queste *9* unità, ho moltiplicato il divisor 3 pel secondo quoziente 3, e tolto il prodotto *9* dalle *9* unità del dividendo; sicchè nulla adesso è restato. Ho tolto adunque il divisor 3 dal dividendo tante volte, quante vi si conteneva, ed ho fatto la divisione richiesta (*N.* 11.).

24. La moltiplicazione serve di prova a questa regola; essendo manifesto, che se 'l divisor 3 entra 23 volte nel dividendo *69*, lo stesso divisor 3 preso 23 volte, ovvero moltiplicato per 23, esser dee

dee uguale al dividendo; poichè la ſomma delle parti è ſempre uguale al tutto, che le contiene (*N.* 13.). Se dunque, dopo aver moltiplicato il diviſore per lo quoziente, non ſi trovaſſe il dividendo, ſarebbe ſegno, che l'operazione è mal fatta. Ciò ſuppone, che nulla reſti al dividendo, che non poſſa più eſſer diviſo dal diviſore; nel qual caſo, per far la prova, dovrebbeſi moltiplicare il diviſore per lo quoziente, e quello ſommare al prodotto, che foſſe reſtato del dividendo, a cui allora la ſomma dovrebbe eſſer uguale.

Siccome la prova del moltiplicare ſi fa col dividere, così la prova del dividere ſi fa col moltiplicare. Eſſendo evidente, che ſe moltiplicando 23 per 3, trovo un prodotto uguale a 69; dividendo 69 per 3, avrò per quoziente 23; ovvero, dividendo 69 per 23, il quoziente ſarà 3.

II. ESEMPIO. *Un Mercante ha sborſato 156024 lire per comprare delle Stoffe del prezzo di 6 lire il braccio; quante braccia n' ha egli comprate?*

Se un braccio vale 6 lire, il Mercante avrà comprato tante braccia, quante volte il 6 entra nelle 156024 lire, cioè nella ſomma da lui sborſata. Per riſpondere adunque alla queſtione, che mi viene propoſta, eſamino quante volte il 6 entra nel 156024, e per conſeguenza mi conviene fare una diviſione.

```
6
156024(26004
36
--
00
--
02
--
24
--
0
```

Scrivo 'l numero da dividerſi 156024, e tiro due linee: l' una ſotto del numero ſcritto, e l' altra a deſtra per diſtinguere il dividendo dal quoziente; indi ſcrivo il diviſore ſopra del dividendo a ſiniſtra; ma ſiccome 6 non entra alcuna volta nel primo carattere 1 del dividendo, così io lo ſcrivo ſopra 'l ſecondo carattere 5.

Dico adunque: il 6 quante volte entra nel 15? e trovando, che non vi può entrare che due ſole volte, ſcrivo 2 al quoziente; moltiplico il diviſore 6 per lo quoziente 2, il che mi dà 12; e ſottraendo 12 dalla porzione 15 del dividendo, avanza 3, ch' io ſcrivo ſotto la linea, non già ſotto al carattere 5, ma un poſto innanzi a ſiniſtra, per poter mettere ſotto al 5, e in conſeguenza ſotto al diviſore 6, il terzo carattere 6 del dividendo, e quindi fare una ſeconda operazione.

Pongo

Pongo adunque sotto al divisore il terzo carattere *6* del dividendo, e veggo, ch'in vece de' tre primi caratteri 15*6* del dividendo, non ho che 3*6*; e però io dico: il *6* quante volte entra nel 3*6*? e trovando, che v'entra *6* volte, scrivo *6* al quoziente. Moltiplico questo quoziente *6* per lo divisore *6*, il che fa 3*6*; e sottraendo questo prodotto da' due caratteri 3*6* del dividendo, e non avanzando alcun residuo, tiro una linea sotto 3*6*, e scrivo 0, non sotto'l divisore, ma un posto più innanzi a sinistra, per la ragione, che ho accennato di sopra.

Abbasso il quarto carattere 0 del dividendo sotto 'l divisore, e veggo, ch'in vece de' quattro primi caratteri 15*6*0 del dividendo, non ho che 00. Dico adunque: il *6* quante volte entra nel zero? e perchè non v'entra alcuna volta, scrivo un zero al quoziente; moltiplico il divisore *6* per questo mio quoziente zero, ed ho zero per prodotto. Tolgo il prodotto zero da' caratteri 00 del dividendo, e tirata una linea sotto i due 00, scrivo il residuo 0 non direttamente sotto'l divisore, ma un posto più innanzi a sinistra.

Abbasso il quinto carattere 2 del dividendo sotto'l divisore, e trovo, ch'in vece de' cinque primi caratteri 15*6*02 del dividendo, non ho che 02, cioè 2; imperocchè il zero, che lo precede, nulla esprime; dico adunque: il *6* quante volte entra nel 2? e perchè non v'entra alcuna volta, scrivo ancora zero al quoziente. Moltiplico il divisor *6* per lo quoziente zero, ed ho zero. Tolgo questo prodotto dal carattere 2 del dividendo, e'l residuo è 2, poichè da 2 sottratto 0, resta 2; tiro una linea, e scrivo il residuo 2, non sotto al divisore, ma un posto più innanzi a sinistra.

Abbasso l'ultimo carattere 4 del dividendo sotto'l divisore, e trovo, ch'in vece del dividendo 15*6*024, non ho che 24. Dico dunque: il *6* quante volte entra nel 24? e perchè v'entra 4 volte, scrivo 4 al quoziente. Moltiplico il divisor *6* per questo quoziente 4, ed ho 24. Tolgo questo prodotto da' caratteri 24 del dividendo, e tirata una linea, vi scrivo sotto il residuo zero; e siccome il dividendo resta senza caratteri, così la divisione è fatta; e in conseguenza il quoziente 2*6*004 esprime il numero delle braccia comperate da questo Mercante.

Se dopo sottratto da' caratteri del dividendo il prodotto del divisore per l'uno de' quozienti, nulla avanza, si può far di meno di scriver 0 di sotto; poichè, quando questo carattere è primo in una serie di numeri, ei si considera uguale a nulla.

S'abbia l'avvertenza, ogni qual volta s' abbassa un carattere del dividendo sotto'l divisore, di mettervi sopra un punto, per indicare ch'è stato abbassato.

III. ESEMPIO. *Dividendo a 26 persone la somma di* 154518 *lire, qual porzione spetterà a ciascuna d' esse?*

Risolvesi la presente questione a somiglianza delle due prime, col solo divario, che in questa il divisore 26 ha due caratteri, là dove nell'altre non ne avea che uno; ed ecco come si opera.

Scrivo'l dividendo 154518 tirando due linee, l'una sotto, e l' altra accanto allo stesso, come ho fatto sopra; indi scrivo il Divisore 26 non sopra del primo carattere 1, giacchè il 2 non entra alcuna volta nell' 1, ma sotto del secondo; e cerco quante volte il 26 entra ne' tre primi caratteri 154 del divisore; ma siccome quest' esame sarebbe incomodo, così lo faccio per parti, cercando quante volte il primo carattere 2 del divisore entra ne' due primi caratteri 15 del dividendo, ed esaminando in oltre, se dopo sottratto il prodotto del divisor 2 per lo quoziente, il secondo carattere 6 è contenuto egual numero di volte nel residuo sommato al terzo carattere 4 del dividendo; che se non fosse contenuto egual numero di volte, scemerei questo numero, sin tanto che i due caratteri 2, e 6 fossero contenuti egualmente.

```
 26
 ...
154518(5943
245
111
 78
 00
```

Dico adunque: il numero 2 entra 7 volte nel 15, poichè 2 volte 7 fanno 14; e sottrato 14 da 15, avanza 1, che col 4 seguente fa 14; ma 6 non è contenuto 7 volte nel 14; e però, in vece di far entrare 2 7 volte nel 15, non lo faccio entrar che sole 6 volte; ora, 2 volte 6 fanno 12, e sottratto 12 da 15, avanza 3, che col 4 seguente fa 34; ma 6 non entra 6 volte nel 34; in vece dunque di far entrare 2 6 volte nel 15, non lo faccio entrar che 5 volte, e dico: 2 volte 5 fanno 10; tolgo 10 da 15, ed avanza 5, che col 4 seguente fa 54; e perchè 6 può entrare 5 volte in 54, scrivo 5 al quoziente.

Moltiplico il divisore 26 per questo quoziente, ne tolgo il prodotto da' tre primi caratteri 154 del dividendo, e dico: 5 volte 6 fanno 30; ora, da 4 non si può tor 30; piglio perciò in prestito dal carattere seguente del dividendo a sinistra tante unità, che mi

mi sono necessarie per fare con 4 un numero maggiore di 30, e però ne piglio in prestito 3, che con 4 faranno 34, e sottratto 30 da 34, avanza 4, ch' io scrivo di sotto un posto più innanzi a sinistra. Continuo dicendo: 2 volte 5 fanno 10, e siccome i 2 caratteri 15 del divisore non dovrebbero valere più di 12, a cagione delle tre unità prese in prestito, così per rimediarvi aggiugno tre unità al prodotto 10, e dico: 2 volte 5 fanno 10, più 3, che ho preso in prestito, uguale 13; levo 13 da 15, e avanza 2, che scrivo di sotto a sinistra del 4 scritto prima.

Fatta questa prima operazione, abbasso il quarto carattere 5 del dividendo sotto l'ultimo carattere del divisore, e veggo, ch' in vece de'quattro primi caratteri 1545 del dividendo, non ho che 245. Esamino, come ho fatto sopra, quante volte il 26 entra nel 245, e trovando, che v' entra 9 volte, scrivo 9 al quoziente; moltiplico il divisor 26 per lo quoziente, ne tolgo il prodotto da 245, e tirata una linea, scrivo sotto, un posto più innanzi a sinistra, il residuo 11.

Faccio le stesse operazioni sopra i due caratteri 1, e 8 del dividendo, che mi avanzano, e trovo, che 'l quoziente totale 5943 è ciò, che si dee a ciascuna delle 26 persone.

25. Vi sono adunque tre cose da osservarsi in ogni operazione, che si fa, qualora dividesi: la prima è d'esaminare quante volte il divisore entra ne' caratteri del dividendo scritti sotto d' esso ed a sinistra se ve ne sono, e scrivere questo numero di volte al quoziente; la seconda è di moltiplicare il quoziente per lo divisore; e la terza di sottrarre il prodotto, che s' ha trovato, da' caratteri del dividendo, che sono sotto il divisore, ed a sinistra.

26. Quando la Divisione si fa esattamente, e senza residuo, come negli addotti esempj, si dice, che 'l divisore è *esatto*: dicesi poi, che non è *esatto*, quando si trova un residuo, che non possa più dividersi. Se mi viene proposto il numero 434, perchè lo divida per 3; dopo fatte tutte l' operazioni, troverò un residuo 2 impossibile a potersi dividere per 3, poichè 3 non è contenuto in 2, e però il divisore non è esatto; e in tal caso se si volesse far la prova, dovrebbesi moltiplicare il divisor 3 per lo quoziente 144, ciò che darebbe il prodotto 432, a cui aggiugnerebbesi il residuo 2 per avere il Dividendo 434.

```
  3
 434( 144
 13
 14
  2

 144
   3
 432
   2
 434
```

27. Quando 'l divisore non è esatto, il residuo è una

una frazione ; così nell'Eſempio riferito, il numero 2 è una frazione, poichè queſto numero ſignifica 2 unità da dividerſi in tre, ovvero due terzi d'unità. Supponiamo, per eſempio, che divider ſi vogliano 2 ſcudi a 3 perſone ; ſe divideſi ogni ſcudo in 3 parti uguali, i due ſcudi ſaranno compoſti di ſei parti uguali, e però ognuna d' eſſe valerà il terzo d' uno ſcudo ; così dividendo queſto numero *6* pel numero 3 delle perſone, il quoziente 2 mi ſervirà a moſtrare, ch'ogni perſona avrà due di queſte *6* parti, e in conſeguenza due terzi di ſcudo. Tanto è adunque dividere fra tre perſone 2 ſcudi, come dare a ciaſcuna d' eſſe 2 terzi di ſcudo: ora 2 terzi di ſcudo ſono una frazione ; onde il reſiduo d' una diviſione non è un'intero, ma una frazione.

28. Dalle coſe dette circa la moltiplicazione, e la diviſione ſi deduce.

1°. *Che in ogni moltiplicazione, ſe divideſi'l prodotto pel numero da moltiplicarſi, il quoziente ſarà uguale al moltiplicatore ; e ſe divideſi l' iſteſſo prodotto per lo moltiplicatore, il quoziente ſarà uguale al numero da moltiplicarſi* (*N.* 24.).

29. 2°. *Che in ogni diviſione eſatta, il prodotto del quoziente pel diviſore è uguale al dividendo ; e in ogni diviſione non eſatta, il prodotto del quoziente pel diviſore, ſommato al reſiduo della diviſione dà una ſomma uguale al dividendo, o ſia al numero da dividerſi* (*N.* 24.).

Vi ſono adunque due differenti regole, l'una per la diviſione eſatta, e l'altra per la non eſatta ; ma s' oſſervi bene, che queſte due regole poſſono ridurſi ad una ſola ; poichè 'l reſiduo d' una diviſione non eſatta eſſendo una frazione (*N.* 27.), ſe ſcrivo il reſiduo accanto al quoziente in modo di frazione, come vedremo nel Capitolo, che ſegue, il quoziente, e la frazione eſſendo moltiplicati dal diviſore, daranno un prodotto uguale al dividendo.

Debbaſi, per eſempio, dividere il numero 14 per 3 ; il quoziente è 4, ed il reſiduo 2 è una frazione, ch' eſprime *due terzi* (*N.* 27.) ; ora, due terzi ſcrivonſi in queſto modo $\frac{2}{3}$ (*N.* 30.) ; così ſcrivo $\frac{2}{3}$ accanto al quoziente 4, ed ho 4 $\frac{2}{3}$; moltiplico 4 $\frac{2}{3}$ pel diviſore 3, dicendo : 3 volte due terzi fanno ſei terzi, e ſei terzi fanno due interi, poichè ogni intero contiene tre terzi ; reſto adunque ſenza frazione, e ritengo due interi ; ora, 3 volte 4 fanno 12 interi, più due, che ho ritenuto, uguale 14 ; così

3
14 (4 $\frac{2}{3}$
2

4 $\frac{2}{3}$
3
14

sì 'l prodotto è 14, e questo prodotto è uguale al dividendo; onde vedesi, *che tanto nella Divisione non esatta, quanto nell'esatta, il prodotto del divisore per lo quoziente totale, cioè pel quoziente, e la frazione, ch'esprime il residuo, è uguale al Dividendo*; e in conseguenza la stessa regola serve in tutti due i casi.

CAPITOLO TERZO.

Delle Frazioni.

30. UNa frazione ci rappresenta sempre due idee, cioè l' idea del numero delle parti, che compongono l'intero, e l' idea del numero di quelle parti, che si prendono. Quando dicesi due terzi di scudo, si concepisce, ch'uno scudo sia diviso in tre parti uguali, e che di queste se ne prendano 2; e'l simile in altri casi. Indi ne segue, che bisogna necessariamente servirsi di due espressioni, le quali corrispondano a queste due idee; ed ecco come si fa.

Per esprimere due terzi, si scrive prima il numero 2, sotto cui tirasi una lineetta, e vi si mette il numero 3; e però scrivesi $\frac{2}{3}$: similmente, per esprimere tre quarti, quattro quinti, ec. si scrive $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ec. Il numero superiore, il qual' è scritto al di sopra della picciola linea, si chiama il *numeratore*, perchè addita quante parti si prendono dall'intero; e quel, ch'è di sotto, chiamasi *Denominatore*, perchè esprime in quante parti uguali si concepisce, che l' intero sia diviso, e perchè determina la spezie della frazione.

31. Due, o più frazioni di differente spezie, cioè due, o più frazioni, i cui denominatori sieno differenti, non possono essere ne insieme sommate, ne sottratte una dall'altra. $\frac{2}{3}$ di scudo, e $\frac{3}{4}$ di scudo non possono fare ne $\frac{5}{3}$, ne $\frac{5}{4}$; imperocchè, quantunque da una frazione si prendano 2 parti d' uno scudo, e dall'altra 3, il che fa 5; tuttavolta non si può dire, che queste cinque parti sieno tutte o terzi, o quarti: per la stessa ragione non si potrebbe sottrarre la frazione $\frac{1}{2}$ dalla frazione $\frac{2}{3}$; quindi è, che per operare sopra tali frazioni, è di necessità ridurle, ma senza cangiar il loro valore, ad un'istessa denominazione; ed è appunto ciò, che noi vedremo dopo stabiliti i seguenti principj.

32. Se

32. *Se due numeri si moltiplicano per un' istesso numero, i prodotti saranno fra loro, come i numeri da moltiplicarsi; cioè, il primo prodotto sarà contenuto nel secondo, o lo conterrà tante volte, quante il primo numero da moltiplicarsi sarà contenuto, o conterrà il secondo.*

Supponiamo, che i numeri da moltiplicarsi sieno 4, ed 8, e ch'il moltiplicatore sia 3: i prodotti saranno 12, e 24; ed è evidente, ch'essendo il numero 4 contenuto 2 volte nell' 8, lo stesso 4 preso 3 volte, cioè 12, sarà altresì contenuto due volte nel numero 8 preso 3 volte, cioè in 24; così 12 sarà a 24, come 4 è ad 8.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ 3 \\ \hline 24 \end{array}$$

33. *Se due numeri si dividono per un' istesso numero, i quozienti saranno nella medesima ragione degli altri da dividersi.*

Debbansi dividere 12 e 48 per 3, i quozienti saranno 4, e 16; ora, perchè 12 è il quarto di 48, il terzo di dodici, cioè 'l quoziente 4, sarà il 4 del terzo di 48, cioè del quoziente 16.

$$\begin{array}{l} 3 \\ 12(4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3. \\ 48(16 \\ 18 \\ 0 \end{array}$$

34. *Se si moltiplica un numero successivamente per più moltiplicatori, il prodotto sarà uguale al prodotto, che s' avrebbe, se si moltiplicasse assolutamente il numero proposto per lo prodotto di tutti i moltiplicatori.*

Debbasi moltiplicare il numero 4 successivamente per 2 e per 3, il prodotto sarà 24; perciocchè 4 moltiplicato per 2 mi dà 8, ed 8 moltiplicato per 3 mi dà 24: similmente, se moltiplico il moltiplicator 2 per lo moltiplicator 3, il che fa 6, e che moltiplichi il numero proposto 4 per questo prodotto, ho ancora 24.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 2 \\ \hline 8 \\ 3 \\ \hline 24 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ 4 \\ \hline 24 \end{array}$$

Ed evidente n'è la ragione; poichè moltiplicando 4 per lo primo moltiplicator 2, prendo 4 due volte, o sia lo raddoppio, e così raddoppiato moltiplicandolo per 3, lo prendo 3 volte, sicchè in tutto lo prendo 6 volte; ora avendo, dopo fatto il prodotto 6 de' moltiplicatori 2 e 3, moltiplicato 4 per 6, ho preso quattro 6 volte; dunque, ec.

35. *Se dividesi un numero successivamente per più divisori, il quoziente sarà uguale al quoziente, che s' avrebbe, se si dividesse assolutamente il numero proposto per lo prodotto di tutti li divisori.*

Deb-

Debbasi dividere il numero 24 per 2 e per 3, il quoziente sarà 4; perciocchè 24 diviso per 2 mi dà 12, e 12 diviso per 3 mi dà 4: similmente, il prodotto de' due divisori 2 e 3 è 6, e se divido 24 per 6, ho altresì 4 per quoziente.

```
 2   3      2    6
24 (12 (4   3   24 (4
-------    ---  -----
 0   0      6    0
```

La ragione si è, che dividendo 24 per 2, l'ho ridotto alla metà, e così partito per metà, avendolo diviso per 3, l'ho ridotto al terzo della metà, e in conseguenza al sesto; imperocchè essendo la metà divisa in tre parti, l'intero, che contiene due metà, contiene anche 6 di queste parti, ognuna delle quali è il sesto dell' intero: ora avendo, dopo fatto il prodotto 6 de' due divisori, diviso 24 per questo prodotto, ho ridotto 24 al sesto; dunque, ec.

Ridurre due, o più frazioni ad un' istesso denominatore.

36. Debbansi ridurre a un' istesso denominatore le due frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$: moltiplico fra loro i due denominatori 3 e 5, ed ho il denominatore comune 15; indi moltiplico il numerator 2 della prima per lo denominatore 5 della seconda, ed il numerator 4 della seconda per lo denominatore 3 della prima, il che mi dà due nuovi numeratori 10, e 12; e dico: che la prima frazione $\frac{2}{3}$ si trova cangiata in $\frac{10}{15}$, che non vale più di $\frac{2}{3}$, e che la seconda $\frac{4}{5}$ si trova cangiata in $\frac{12}{15}$, che non vale più di $\frac{4}{5}$.

```
10      12
2/3 15  4/5
```

Per restarne convinti basta riflettere, ch'operando in tal modo, il numerator 2 della prima frazione, e 'l suo denominatore sono stati moltiplicati per un' istesso numero 5; e che però i prodotti 10, e 15 sono nella medesima ragione de' numeri da moltiplicarsi 2, e 3 (*N.* 32.); dal che ne segue, che 10 esprime due terzi di 15, siccome 2 esprime due terzi di 3, e che per conseguenza tanto è dividere l'intero in 15 parti uguali, e prenderne 10, come dividerlo in 3, e prenderne 2: similmente, perchè il numerator 4 della seconda frazione, e'l suo denominatore 5 sono stati moltiplicati pel medesimo numero 3, i prodotti 12 e 15 sono nell'istessa ragione de' numeri 4, e 5. Onde le due nuove frazioni $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$ sono simili alle due proposte $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$; ed è manifesto, ch'esse hanno il medesimo denominatore 15, essendo egli nell'una, e nell'altra frazione il prodotto de' 2 denominatori 3, e 5 delle frazioni proposte.

Deb-

Debbansi ridurre ad un' istesso denominatore le tre frazioni proposte $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$; moltiplico i tre denominatori fra loro, cioè moltiplico 3 per 5, il che fa 15, e 15 per 6, il che fa 90; e piglio 90 per comun denominatore: indi moltiplico il numerator 2 della prima successivamente per i denominatori dell' altre due, ovvero assolutamente per lo prodotto 30 de' due denominatori 5, e 6 (*N.* 34.); e'l prodotto 60 è il nuovo numeratore di questa frazione.

3			
5	60	72	15
15	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$
6		90	
45			

Moltiplico eziandio il numerator 4 della seconda successivamente per i denominatori 3, e 6 dell'altre due, ovvero assolutamente per lo prodotto 18 di questi due denominatori; e 'l prodotto 72 è il nuovo numeratore di questa seconda frazione: moltiplico per ultimo il numerator 1 della terza frazione successivamente per i denominatori 3 e 5 dell'altre due, ovvero assolutamente pel loro prodotto 15; ed il prodotto 15 è il nuovo numeratore di questa terza frazione.

Per la qual cosa le tre frazioni proposte $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$ sono cangiate in quest'altre tre $\frac{60}{90}$, $\frac{72}{90}$, $\frac{15}{90}$, le quali tutte hanno un medesimo denominatore, ed i cui valori sono simili a quelli delle frazioni proposte. La dimostrazione di ciò è simile alla precedente; perciocchè vedesi chiaramente, ch'operando in tal guisa, il numeratore 2, e'l denominator 3 della prima frazione sono stati l'uno, e l'altro successivamente moltiplicati per i denominatori 3 e 5, ovvero assolutamente per lo prodotto 30 di questi due denominatori; e che i prodotti 60, 90 sono nell'istessa ragione di 2, e 3 (*N.* 34.); in conseguenza di che 60 esprime due terzi di 90, siccome 2 esprime due terzi di 3: donde nasce, che tanto sia dividere l'intero in 90 parti uguali, e prenderne 60, come dividerlo in 3, e prenderne 2; e però la frazione $\frac{60}{90}$ è uguale alla frazione $\frac{2}{3}$. Si discorra egualmente sull'altre due frazioni.

La regola adunque è di moltiplicare tutti i denominatori fra loro, e di prendere il prodotto per denominatore comune; indi di moltiplicare il numeratore d'ogni frazione per i denominatori di tutte l'altre; e ciò mi darà i nuovi numeratori, che si cercano.

Ridur-

Ridurre un' intero ad una frazione, di cui sia dato il denominatore.

Debbasi ridurre il numero 15 ad una frazione, il cui denominatore sia 3; moltiplico 15 per 3, ed ho il prodotto 45: scrivo adunque 45, e tirata sotto una linea, scrivo il denominatore 3, il che mi dà la frazione $\frac{45}{3}$ uguale all'intero 15.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \underline{3} \\ 45 \end{array} \qquad \frac{45}{3}$$

DIMOSTRAZIONE. Ciascuna unità dell' intero 15 essendo divisa in tre parti uguali, contiene 3 terzi; onde 15 unità debbono contenere 15 volte 3 terzi, o sia $\frac{45}{3}$; e però la frazione $\frac{45}{3}$ è uguale a 15.

Ridurre ad un' intero una frazione impropriamente detta, ovvero ridurre ad un' intero una frazione, il cui numeratore superi 'l denominatore.

38. Debbasi ridurre in intero la frazione $\frac{45}{3}$; divido 45 per lo denominator 3, ed il quoziente 15 è l' intero da me cercato.

$$\begin{array}{l} 3 \\ \underline{45\ (15} \\ \underline{15} \\ 0 \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo questa una frazione di terzi, ogni intero ne dee contener 3: vi debbono perciò essere in $\frac{45}{3}$ tanti interi, quanti sono i 3, che vi si contengono; ed in conseguenza, dividendo 45 per 3, s'avrà il numero degli interi contenuti in $\frac{45}{3}$.

Ridurre una frazione a minori termini.

39. Debbasi ridurre a minori termini la frazione $\frac{12}{24}$: ora, per far ciò, mi conviene cercare un numero, che divida esattamente il numerator 12, e'l denominatore 24; imperocchè, è ben vero, che i quozienti saranno più piccioli di 12 e 24, ma tuttavolta essi saranno nella stessa ragione (N.33.): dal che ne segue, che potrò scrivere il primo quoziente, in vece del numerator 12, e'l secondo, in vece del denominatore 24; ciò che mi darà una nuova frazione uguale a $\frac{12}{24}$, i cui termini saranno minori. 2°. Bisogna in oltre, che 'l divisore, ch' io cerco, sia 'l divisore più grande, che possa esattamente dividere 12, e 24; imperocchè allora i quozienti saranno tali, che minori non potranno esser giammai; mercè che

quanto il diviſore è più grande, tanto meno eſſo è contenuto nel dividendo, e in conſeguenza diventa minore.

Ora dunque, per non ommettere alcuna di queſte due condizioni, divido il denominatore 24 per lo numerator 12, e trovando, che la diviſione è eſatta, e che 'l quoziente è 2, divido ancora 12 per ſe ſteſſo, ed il quoziente è 1: così eſſendo ſtati i due numeri 12, e 24 diviſi per lo ſteſſo numero 12, i quozienti 1 e 2 ſono nella medeſima ragione (*N*. 33.), e in conſeguenza la frazione $\frac{1}{2}$ equivale alla frazione $\frac{12}{24}$; oltrechè, non ſi potrebbe trovare alcun' altro termine minore, ch' eſprimeſſe queſta frazione; perciocchè eſſendo il diviſor 12 uguale al numeratore, non ſi può trovare un numero maggiore, che divida eſattamente il 12, e 'l 24.

```
 12        12
 24 ( 2    12 ( 1
 --        --
  0         0
```

Se dopo che s' ha diviſo il denominatore per lo numerator, la diviſione non foſſe eſatta, ſi dovrebbe traſcurare il quoziente, e dividere il numeratore pel reſiduo della prima; e ſe queſta ſeconda diviſione ancora non foſſe eſatta, dovrebbe dividerſi il reſiduo della prima per quello della ſeconda, e continuare ſin tanto che ſi trovaſſe un diviſore eſatto; trovato poi un tal diviſore, dividerebbeſi per eſſo il numeratore, e 'l denominatore della frazione propoſta; e i due quozienti comporrebbero la ridotta frazione.

Debbaſi ridurre a minori termini la frazione $\frac{168}{240}$. Divido il denominatore 240 per lo numerator 168, e la diviſione non è eſatta, perocchè mi reſta 72.

```
168        72         24
240( 1    168 ( 2    72 ( 3
---       ---        --
 72        24         0
```

Laſcio da parte il quoziente 1, e divido 'l numeratore 168 per 72; e la diviſione ancora non è eſatta, perocchè mi reſta 24. Traſcuro anche il quoziente 2, e divido il primo reſiduo 72 pel ſecondo reſiduo 24; e finalmente la diviſione è eſatta.

Piglio adunque il diviſore 24: divido per eſſo il numeratore 168, e 'l denominatore 240; ed i quozienti 7 e 10 ſono nell' iſteſſa ragione di 168, e 240; dunque la frazione $\frac{7}{10}$ è uguale alla frazione $\frac{168}{240}$ ridotta a minori termini.

```
 24         24
168( 7     240( 10
---        ---
 00         00
             0
```

DIMOSTRAZIONE. Dico 1°, che 24 dee dividere eſattamente il numerator 168, e 'l denominatore 240, perchè eſſo divide eſat-

esattamente 72; ora, 168 contiene 2 volte 72 più 24, come scorgesi dalla fatta divisione; e però 168 è uguale a 2 volte 72 più 24: ma 24 divide esattamente se stesso, e divide anche esattamente 2 volte 72; perchè dunque 24 divide esattamente 72, dovrà altresì dividere esattamente 2 volte 72 più 24, cioè 168. Similmente 240, come apparisce dalla divisione fatta, contiene una volta 168 più 72; onde 240 è uguale a 168 più 72: ora 24 divide esattamente 168, e 72; dunque 24 dee ancora dividere esattamente 168 più 72, o sia 240.

Dico in secondo luogo, che 24 è il divisore più grande, che possa dividere esattamente 168, e 240. Se si volesse, che vi fosse un numero maggiore di 24, che dividesse esattamente 168, e 240, bisognerebbe, che questo numero dividesse esattamente 168, e 'l primo residuo 72; perciocchè essendo 240 uguale a 168 più 72, se 'l divisore di 168 non dividesse esattamente 72, non dividerebbe nemeno 168 più 72, o sia 240. Oltracciò, essendo 168 uguale a 2 volte 72 più 24, il divisore, che dividesse esattamente 168 e 72, dovrebbe altresì dividere esattamente 2 volte 72, e 24; altrimenti esso non dividerebbe 168 uguale a 2 volte 72 più 24: ma 24 non può avere un divisor maggiore di se stesso; ond'egli è impossibile di poter trovare un numero maggiore, che divida esattamente 168, e 240.

Valutare una frazione.

40. Ho detto altrove (*N.* 8.), ch'è stato introdotto l'uso di fare delle divisioni e suddivisioni di certe cose, e che queste divisioni e suddivisioni sono state chiamate sottospezie. Ora, il *valutare* una frazione dell'una, o dell'altra di queste cose, è il cercare quante sottospezie contenga la frazione.

Per sapere quanti soldi contengano $\frac{3}{4}$ di lira, che sono la sottospezie della lira, riduco la lira in soldi, cioè la moltiplico per 20, perciocchè essa contiene 20 soldi; indi partisco 20 per 4 a fine d'averne il quarto ch'è 5, e finalmente moltiplico questo quarto per 3, perchè ho $\frac{3}{4}$; ed il prodotto 15 soldi m'indicherà, che $\frac{3}{4}$ di lira vagliono 15 soldi; ciò che non ha bisogno di prova.

Sommare insieme due, o più frazioni.

41. Se le frazioni hanno un' istesso denominatore, si sommano insieme tutti i numeratori; ma se i denominatori sono differenti, riduconsi prima le frazioni ad un medesimo denominatore.

PRIMO ESEMPIO. *Un' uomo ha prima comprato 12 braccia $\frac{3}{5}$ di stoffa, e qualche tempo dopo ne ha comprate 14 braccia $\frac{4}{5}$; in tutto quante braccia ne ha egli comprate?*

Scrivo le braccia sotto le braccia, e le frazioni sotto le frazioni, poi dico: $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ fanno $\frac{7}{5}$, e siccome il numerator 7 è maggiore del denominator 5, così io divido 7 per 5, per sapere quanti interi vi sono, e trovo un'intero con un residuo 2, cioè $\frac{2}{5}$; scrivo $\frac{2}{5}$ sotto la linea, e passando alle braccia, dico: 1 intero, che ho, con 2 e 4 fanno 7, e continuando l'operazione col solito metodo, trovo, che quest'uomo ha comprato 27 braccia, e $\frac{2}{5}$ di stoffa.

braccia	
12	$\frac{3}{5}$
14	$\frac{4}{5}$
braccia	
27	$\frac{2}{5}$

II. ESEMPIO. *Un Mercante ha venduto del drappo a tre persone: alla prima ne ha venduto 15 braccia $\frac{2}{3}$, alla seconda 12 braccia $\frac{3}{4}$, e alla terza 18 braccia $\frac{4}{5}$; si dimanda quanto egli ha venduto in tutto?*

Riduco le tre frazioni all'istesso denominatore, ed ho le nuove frazioni $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$ simili alle prime.

40	45	48
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
	60	

Scrivo adunque 15 braccia $\frac{40}{60}$, in vece di 15 braccia $\frac{2}{3}$; 12 braccia $\frac{45}{60}$, in vece di 12 braccia $\frac{3}{4}$, e 18 braccia $\frac{48}{60}$, in vece di 18 braccia $\frac{4}{5}$; e giugnendo insieme i tre numeratori, la somma è $\frac{133}{60}$: ora, siccome il numerator è più grande del denominatore, così io divido 133 per 60, ed il quoziente è 2 interi con un residuo $\frac{13}{60}$. Scrivo $\frac{13}{60}$ sotto le frazioni, e portando 2 interi nella fila delle braccia, dico: 2, che porto, e 5 fanno 7, e continuando l'operazione col metodo ordinario, trovo, che questo Mercante ha venduto 47 braccia $\frac{13}{60}$.

braccia	
15	$\frac{40}{60}$
12 . . .	$\frac{45}{60}$
18 . . .	$\frac{48}{60}$
braccia	
47	$\frac{13}{60}$

Sot-

Sottrarre una frazione da un'altra.

42. Se i denominatori delle frazioni sono uguali, togliesi il numerator della picciola dal numeratore della grande, e la differenza sarà il numeratore della frazione rimanente; ma se sono differenti, riduconsi prima le due frazioni ad un' istessa denominazione.

PRIMO ESEMPIO. *Un' uomo intraprende un viaggio, che seguitando la strada comune sarebbe di 28 leghe $\frac{3}{4}$; ma prendendone un'altra non sarebbe che di 17 $\frac{1}{4}$: quante leghe vien egli a risparmiare?*

Scrivo questi due numeri l' uno sotto l' altro, cioè le leghe del minore sotto quelle del maggiore, e le frazioni sotto le frazioni; poi dico: da $\frac{3}{4}$ sottratto $\frac{1}{4}$, o sia da 3 sottratto 1, avanza 2, ovvero $\frac{2}{4}$, cioè $\frac{1}{2}$; da 8 sottratto 7, avanza 1; e da 2 sottratto 1, avanza 1: così quest' uomo farà 11 leghe $\frac{1}{2}$ di meno.

$$\begin{array}{lll} 28 & \text{leghe} & \frac{3}{4} \\ 17 & & \frac{1}{4} \\ \hline 11 & \text{leghe} & \frac{2}{4} \text{ o } \frac{1}{2} \end{array}$$

II. ESEMPIO. *Se da 17 braccia $\frac{3}{4}$ si tolgono 15 braccia $\frac{2}{3}$, cosa resta?*

Riduco le due frazioni all' istesso denominatore, il che mi dà $\frac{9}{12}$, e $\frac{8}{12}$; scrivo dunque 17 braccia $\frac{9}{12}$, in vece di 17 braccia $\frac{3}{4}$, e sotto scrivo 15 braccia $\frac{8}{12}$, in vece di 15 braccia $\frac{2}{3}$; dopo ciò io dico: da $\frac{9}{12}$ sottratti $\frac{8}{12}$, o sia da 9 sottratto 8, avanza 1, o $\frac{1}{12}$; da 7 braccia sottrattene 5, avanzano 2; e da 1 sottratto 1, nulla resta: così il residuo è 2 braccia $\frac{1}{12}$.

$$\begin{array}{ccc|lll} 9 & & 8 & 17 & \text{brac.} & \frac{9}{12} \\ \frac{3}{4} & & \frac{2}{3} & 15 & & \frac{8}{12} \\ & 12 & & \hline 2 & \text{brac.} & \frac{1}{12} \end{array}$$

III. ESEMPIO. *Une ha comprato 25 braccia $\frac{2}{5}$ di stoffa, e ne ha cedute 9 braccia $\frac{3}{4}$ ad un' amico; quante gliene restano?*

Riduco le due frazioni all' istesso denominatore, il che mi dà $\frac{8}{20}$, e $\frac{15}{20}$; scrivo adunque 25 braccia $\frac{8}{20}$, e di sotto 9 braccia $\frac{15}{20}$; poi dico: da $\frac{8}{20}$ non potendo sottrar $\frac{15}{20}$, piglio in prestito un' unità dal posto delle braccia, e riducen-

$$\begin{array}{ccc|lll} 8 & & 15 & 25 & \text{brac.} & \frac{8}{20} \\ \frac{2}{5} & & \frac{3}{4} & 9 & & \frac{15}{20} \\ & 20 & & \hline 15 & \text{brac.} & \frac{13}{20} \end{array}$$

dola

dola ad una frazione, il cui denominatore ſia 20, ho $\frac{20}{20}$, i quali ſommati agli $\frac{8}{20}$, che ho, fanno $\frac{28}{20}$; e da $\frac{28}{20}$ ſottratti $\frac{15}{20}$, avanzano $\frac{13}{20}$; da 4 non potendo ſottrar 9, piglio in preſtito un'unità dal poſto ſeguente, la quale unità val 10, e ſommati queſti 10 a' 4, che ho, fanno 14: da 14 ſottraendo 9, avanza 5, e finalmente da 1 ſottraendo 0, avanza 1; onde a queſt' uomo avanzano 15 braccia, e $\frac{13}{20}$ di ſtoffa.

Moltiplicare una frazione per un' altra.

43. Per moltiplicare due frazioni l' una per l'altra, o abbiano gli ſteſſi denominatori, o gli abbiano differenti, ſi moltiplicano fra loro i due numeratori, non meno che i due denominatori, e ſi ha una nuova frazione, ch'è il prodotto delle due.

Per moltiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{4}{5}$, moltiplico il numerator 3 per lo numerator 4, il che fa 12, e'l denominatore 4 per lo denominator 5, ciò che fa 20; e ſcrivo $\frac{12}{20}$ per prodotto delle due frazioni.

DIMOSTRAZIONE. Se in vece del moltiplicatore $\frac{4}{5}$ aveſſi quattro unità, moltiplicherei il numerator 3 della frazione $\frac{3}{4}$ per lo moltiplicator 4, ed avrei $\frac{12}{4}$ per prodotto; imperocchè $\frac{3}{4}$ preſi 4 volte, cioè tante volte, quante ſono l'unità, che ſi contengono nel moltiplicator 4, fanno $\frac{12}{4}$: ora, non debbo moltiplicare $\frac{3}{4}$ per 4 unità, ma per $\frac{4}{5}$, o ſia per 4 diviſo per 5; e perciò moltiplicando per 4, ho moltiplicato più di quello dovea, e 'l prodotto $\frac{12}{4}$ è troppo grande: vi rimedio adunque col dividere queſto prodotto per lo denominatore 5 di $\frac{4}{5}$; ma tanto eſſendo $\frac{12}{4}$, come 12 diviſo per 4, ne ſegue, che 12 diviſo per 4 dee poſcia eſſer diviſo per 5, ovvero, che 12 eſſer dee aſſolutamente diviſo per lo prodotto 20 de' due diviſori 4, e 5 (*N.* 35.). Dunque la frazione $\frac{12}{20}$ è 'l prodotto cercato.

Dividere una frazione per un' altra.

44. Per dividere una frazione per un' altra, biſogna che i denominatori ſieno ſimili; altrimenti ſi debbono prima ridurre le frazioni all' iſteſſa denominazione, e poi dividere il numerator della frazione da dividerſi per lo numeratore di quella, che la dee dividere.

Per dividere $\frac{8}{9}$ per $\frac{4}{9}$, divideſi 8 per 4; e 'l quoziente 2 mi moſtra, che la frazione $\frac{8}{9}$ contiene 2 volte la frazione $\frac{4}{9}$.

Per

Per dividere $\frac{9}{10}$ per $\frac{7}{10}$, si divide 9 per 7, ed il quoziente $\frac{9}{7}$, o $1\,\frac{2}{7}$, dinota, che la frazione $\frac{9}{10}$ contiene $\frac{7}{10}$ una volta più due settimi di volta, cioè che la frazione $\frac{9}{10}$ contiene $\frac{7}{10}$ più 2 parti di sette decimi, o $\frac{2}{10}$, e così ec. (*a*)

Delle frazioni di frazioni.

45. Siccome quello, che prendesi d' un intero, quando è diviso in più parti uguali, si dice frazione: così quello, che si prende d' una frazione, quando è divisa in più parti uguali, dicesi frazione di frazione. Dal che chiaramente apparisce, ch' una frazione di frazione non ha un rapporto immediato all'intero, ma soltanto alla frazione, di cui essa è parte. $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{4}$ non è il terzo dell'intero, ma il terzo d' una parte dell'intero.

Per operare sopra le frazioni di frazioni, fa d' uopo dar loro primieramente un rapporto immediato all' intero, cioè ridurle a semplici frazioni; e si fa così.

Sia la frazione di frazione $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{4}$ di braccio; moltiplico i due denominatori fra loro, il che mi dà 12, e prendendo 12 per denominatore, ed 1 per numeratore, ho la frazione $\frac{1}{12}$ di braccio uguale ad $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{4}$ di braccio: ciò è manifesto, perocchè contenendo un braccio quattro quarti, ed ogni quarto contenendo tre terzi, un braccio dee necessariamente contenere tre volte quattro, o 12 parti tali, ch'ognuna d'esse sia 'l terzo del suo quarto; e però ognuna di queste parti sarà il dodicesimo d' un braccio.

Sia in oltre la frazione di frazione $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ di braccio: moltiplico i due numeratori, il che fa 6, e i due denominatori, il che fa 12, ed ho la frazione $\frac{6}{12}$ di braccio uguale a $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ di braccio; imperocchè essendo il terzo d' un quarto un dodicesimo di braccio, i due terzi d' un quarto saranno due dodicesimi di braccio, e i due terzi di tre quarti saranno 2 volte 3, o 6 dodicesimi di braccio.

CA-

(a) Nota. *Senza ridurre le frazioni allo stesso denominatore, esse si dividono l'una per l'altra, moltiplicandole in croce. La frazione* $\frac{2}{3}$ *si abbia a dividere per* $\frac{1}{4}$; *il quoziente di questa divisione sarà* $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 1}$, *ovvero* $\frac{8}{3}$. *Altrove si vedrà la ragione di questa pratica.*

CAPITOLO QUARTO.

Della Moltiplicazione, e Divisione composta.

46. LA parte *aliquota* d'un numero è una parte, ch' essendo presa più volte, è uguale a certo numero: 4 preso 5 volte è uguale a 20; dunque 4 è una parte *aliquota* di 20.

47. La parte *aliquanta* d'un numero è una parte, ch' essendo presa più volte, è sempre minore, o maggiore di esso numero, senza mai potergli esser uguale: *6* preso 3 volte è minore di 20, e lo stesso *6* preso 4 volte, 5, ec. è maggiore di 20. Dunque *6* è parte *aliquanta* di 20.

48. Ogni parte aliquanta d'un numero può esser divisa in due, o più parti aliquote. Così il numero *6*, parte aliquanta di 20, può esser diviso in due parti 4 e 2, di cui la prima è contenuta 5 volte in 20, e la seconda dieci: lo stesso *6* ancora può esser diviso in due parti 5, ed 1; di cui la prima è contenuta 4 volte in 20, e la seconda 20 volte.

49. La moltiplicazione composta si fa col mezzo delle parti aliquote, e dell' aliquante ridotte in aliquote, come si vedrà dopo stabiliti i due susseguenti principj.

50. *Se dividesi un numero intero per* 10, *il quoziente sarà sempre uguale a tutte le parti del dividendo, dall' ultima a dritta in fuori, che sarà una frazione, il cui denominatore sarà* 10.

Debbasi dividere il numero 3642 per 10: mi servo nel fare la divisione del metodo ordinario, e scorgo, che in ogni operazione, il primo numero 1 del divisore è contenuto nel carattere del dividendo, scritto sotto del medesimo tante volte, quante sono l'unità, che si contengono in detto carattere; e che 'l secondo carattere o del divisore lascia sempre sussistere il carattere del dividendo, ch'è sotto di esso: onde, dopo l'ultima operazione, debbo avere al quoziente 364, cioè i tre primi caratteri del dividendo; e l' ultimo è un residuo da dividersi [per 10, ed è per conseguenza $\frac{2}{10}$.

$$\begin{array}{l} 10 \\ 3642\ (364\tfrac{2}{10} \\ 64 \\ 42 \\ 2 \end{array}$$

Quindi

Quindi ne fegue, ch' in vece di fare la divifione ricercata, non fi ha che togliere l'ultimo carattere, e fcrivere $364 \frac{2}{10}$.

§ 51. *Se dividefi un numero per 20, il quoziente farà fempre uguale alla metà di tutti i termini del numero propofto, che precedono l' ultimo; e'l refiduo farà una frazione, che avrà 20 per denominatore.*

Debbafi dividere il numero 4652 per 20. Faccio la divifione, e trovo, che 'l primo carattere 2 del divifore mi dà in ogni operazione la metà del carattere del dividendo fcritto fotto di effo, tanto effendo prender la metà, come dividere per 2, e che 'l fecondo carattere zero del divifore lafcia fempre fuffiftere il carattere del dividendo fcritto fotto del medefimo: io debbo adunque, dopo l' ultima operazione, avere al quoziente 232, cioè la metà de' tre primi caratteri 465 del dividendo; e dopo aver prefo quefta metà, avanza 1 decina, la quale fommata all' ultimo carattere 2 del dividendo fa 12, cioè 12 da dividerfi per 20, o $\frac{12}{20}$.

20
4652($232 \frac{12}{20}$
65
52
12

Quindi ne fegue, ch' in vece di fare la divifione ricercata, non faccio che toglier dal dividendo l'ultimo carattere a deftra, e prendere la metà andando da finiftra a dritta; dico adunque: la metà di 4 è 2, la metà di 6 è 3, e la metà di 5 è 2; e avanza 1 decina, la quale unita al carattere fottratto 2 fa $\frac{12}{20}$; così avremo $232 \frac{12}{20}$.

Lafcio efaminare a' principianti cofa farebbe, fe fi divideffe un numero per 30, 40, 50, 60, ec.

PRIMO ESEMPIO. *Un Operajo ha fatto 365 pertiche di lavoro a 4 lire, 10 foldi la pertica; quanto fe gli dee?*

Scrivo il numero da moltiplicarfi 365, e fotto 'l fuo ultimo carattere a deftra fcrivo 4 lire; indi fcrivo 10 foldi un pofto più innanzi, e finalmente moltiplicando 365 per 4, ho 1460 lire. Ora, per moltiplicare per 10 foldi, dico: fe un braccio non coftaffe ch' una lira, o 20 foldi, il prezzo delle 365 pertiche farebbe 365 lire; ma 10 foldi fono la metà d' una lira, e però non debbo avere che la metà di 365; dico pertanto: la metà di 3 è 1, e avanza 1, il quale unito al carattere feguente 6

	pert.	
	365	
	lire	fol.
	4	10
	1460	
	182	10
	lire	fol.
	1642	10

te *6* fa *16*; la metà di *16* è 8, la metà di 5 è 2, e avanza una lira da dividersi in due, o sia una metà di lira: ora, la metà d'una lira è 10; scrivo adunque 10 soldi, e sommando insieme i due prodotti, ho 1642 lire, 10 soldi pel valore delle 365 pertiche.

II. ESEMPIO. *Quanto valeranno 535 pertiche a 5 lire, 13 soldi, 6 denari la pertica?*

pert.		
535		
lir.	sol.	den.
5	13	6
2675		
267	10	
53	10	
26	15	
13	7	6
lir.	sol.	den.
3036	2	6

Moltiplico 535 per 5 lire, ed ho 2675 lire; e perchè i 13 soldi non sono una parte aliquota di 20 soldi, o sia d'una lira, divido 13 soldi in tre parti 10, 2, e 1, di cui 10 è la metà d'una lira, 2 è il decimo, ed 1 il ventesimo; moltiplico dunque per 10 soldi, dicendo: se una pertica non valesse ch' una lira, 535 pertiche non valerebbero che 535 lire: ora, 10 è la metà d'una lira; onde non debbo pigliare che la metà, la quale è 267 lire, 10 soldi.

Per moltiplicare per 2 soldi, che sono il decimo d'una lira, piglio 'l decimo di 535, ch'è ciò, che mi renderebbe una lira; ora, per pigliare il decimo, o per dividere per 10, taglio l'ultimo carattere di 535 (*N*.50.), ed ho 53 lire; e'l residuo è una frazione $\frac{5}{10}$: ma ogni decimo vale 2 soldi; dunque 5 decimi vagliono 10 soldi, e in conseguenza io ho 53 lire, 10 soldi per lo prodotto de' 2 soldi.

Per moltiplicare per 1 soldo, piglio 'l ventesimo di 535 lire, ch'è ciò, che mi renderebbe una lira, cioè divido 535 per 20; taglio però l'ultimo carattere 5, e piglio la metà di 53, ch'è 26 (*N*.51.), e avanza 1, il quale unito all'ultimo carattere fa $\frac{15}{20}$. Ora, perchè ogni ventesimo vale 1 soldo, $\frac{15}{20}$ valeranno 15 soldi; onde io ho 26 lire, 15 soldi per lo prodotto d'un soldo.

Finalmente, per moltiplicare per *6* denari, piglio la metà di ciò, che m'ha reso un soldo, perchè *6* denari fanno mezzo un soldo, ed ho 13 lire, 7 soldi, *6* denari. Ma se non avessi avuto che 10 soldi, senz'avere il prodotto d'un soldo, da cui io vengo subitamente in cognizione, che *6* denari debbono darmi la metà di questo prodotto, in tal caso farei una supposizione, dicendo: se dovessi moltiplicare per 2 soldi, che sono il decimo d'una lira, taglie-

rei

rei l'ultimo carattere di 535, ed avrei 53 lire, e $\frac{1}{10}$, i quali perchè vagliono ciascuno 2 soldi, fanno 10 soldi; onde io avrei 53 lire, 10 soldi per lo prodotto de' 2 soldi: ora, 6 denari sono'l quarto di 2 soldi; dunque 6 denari debbono darmi di prodotto il quarto di 53 lire, 10 soldi; e prendendo 'l quarto, avrei il quarto di 5, ch'è 1, e avanza 1, che col 3 seguente fa 13; il quarto di 13 è 3, ed avanza una lira, o 20 soldi, i quali sommati a' 10, che seguono, fanno 30; il quarto di 30 soldi è 7, ed avanzano 2 soldi, o 24 denari, il cui quarto è 6; così io avrei 13 lire, 7 soldi, 6 denari per lo prodotto de' 6 denari.

Sommo insieme tutt' i prodotti da me trovati, ed il prodotto totale 3036 lire, 2 soldi, 6 denari è'l prezzo delle 535 pertiche.

III. ESEMPIO. *Cosa vengono a costare 327 pertiche, 3 piedi, 6 pollici a 3 lire, 9 soldi, 4 denari la pertica?*

pert.	pied.	pol.	
327	3	6	
lir.	sol.	den.	
3	9	4	
981			
81	15		
65	8		
5	9		
1	14	8	
0	5	9	$\frac{2}{6}$ *ovvero* $\frac{1}{3}$
lir.	sol.	den.	
1135	12	5	$\frac{1}{3}$

Lascio per ora di moltiplicare i 3 piedi 6 pollici del moltiplicatore, e moltiplico solamente 327 per 3; il che mi dà 981 lira.

Ma perchè 9 soldi non sono una parte aliquota di 20 soldi; così io divido 9 in 2 parti 5, e 4, di cui l'una è'l quarto, e l'altra il quinto d'una lira.

Moltiplico per 5 soldi, prendendo 'l quarto di 327, e dico: il quarto di 32 è 8, quello di 7 è 1, e avanzano 3 lire da dividersi per 4; o sia $\frac{3}{4}$ di lire; ora, perchè ogni quarto vale 5 soldi, $\frac{3}{4}$ valeranno 15 soldi, e in conseguenza io avrò 81 lira, 15 soldi per lo prodotto di 5 soldi.

Moltiplico poi per 4 soldi, prendendo 'l quinto di 327, e dico: il quinto di 32 è 6, ed avanza 2, che col carattere seguente fa 27; il quinto di 27 è 5, e avanza 2 da dividersi per 5, o sia $\frac{2}{5}$: ora, ogni quinto vale 4 soldi; dunque $\frac{2}{5}$ vagliono 8 soldi; così io ho 65 lire, 8 soldi per lo prodotto di 4 soldi.

Finalmente, dovendo moltiplicare per 4 denari, suppongo di dover moltiplicare per 2 soldi, che sono 'l decimo d'una lira; e in

 tal

tal caso io avrei 32 lire, $\frac{7}{10}$, o sia 14 soldi per lo prodotto di due soldi: ma 4 denari sono 'l sesto di 2 soldi; onde io debbo pigliare il sesto di 32; ora, questo sesto è 5, ed avanzano 2 lire, o 40 soldi, i quali sommati a' 14, che ho, fanno 54 soldi; il cui sesto è *9*: io ho adunque 5 lire *9* soldi per lo prodotto de' quattro denari.

Vegniamo ora ai 3 piedi, *6* pollici. Siccome una pertica costa 3 lire, *9* soldi, 4 denari; 3 piedi, che sono la metà d'una pertica, non costeranno che la metà di 3 lire, *9* soldi, 4 denari. Però io dico: la metà di 3 lire è 1 lira, ed avanza 1 lira, o 20 soldi, i quali sommati a' *9* soldi fanno *29*; la metà di *29* soldi è 14, e avanza 1 soldo, o 12 denari, i quali sommati a' 4 denari fanno *16*, la cui metà è 8.

Sei pollici sono 'l sesto di 3 piedi; imperocchè essendo un piede del valore di 12 pollici, 3 piedi saranno del valore di *36*, il cui sesto è *6*. Piglio 'l sesto di ciò, che m'han reso tre piedi, dicendo: il sesto d'una lira è zero di lire, e avanza una lira, o 20 soldi, i quali sommati a' 14 soldi fanno 34; il sesto di 34 soldi è 5, e avanzano 4 soldi, ovvero 48 denari, i quali sommati agli 8 denari fanno *56*; finalmente il sesto di *56* denari è *9*, e scrivo il residuo $\frac{2}{6}$ od $\frac{1}{3}$.

Sommo tutti i prodotti da me trovati, e la somma totale 1135 lire, 12 soldi, 5 denari $\frac{1}{3}$ è ciò, che vengono a costare 327 pertiche, 3 piedi, *6* pollici.

52. AVVERTIMENTO. Ho detto, parlando de' 4 denari, che supposto, ch'avessi dovuto moltiplicare per 2 soldi, i quali sono il decimo d'una lira, non avrei fatto che tagliar l'ultimo carattere di 327; ed avrei avuto 32 lire, 14 soldi per lo prodotto de' 2 soldi, cioè m'avrebbe convenuto raddoppiare l'ultimo carattere 7, e metterlo nel posto de' soldi, per le ragioni addotte (*N.* 50.): ora, volendo moltiplicare per 4 denari, che sono 'l sesto di 2 soldi, ho preso il sesto di 32, ch'è 5, e mi sono avanzate 2 lire, o quattro decine di soldi, le quali sommate a' 14 soldi fanno 54 soldi, de' quali ho preso il sesto; ciò che mi fa conoscere d'aver raddoppiato il residuo 2, siccome raddoppiar si dee l'ultimo carattere 7 del numero 327. Se non si volesse raddoppiare nè il residuo, nè l'ultimo carattere, basterebbe pigliar il terzo in vece del sesto, e dire: il terzo di 27 soldi è *9*, a cagione che 'l terzo di 27, ch'è la metà di 54, è uguale al sesto dell'intero, cioè al sesto di 54; e si farà

si farà lo stesso in ogni caso simile, pigliando pel residuo, e per l' ultimo carattere una frazione, il cui denominatore non sia più che la metà del denominator di quella, che si pigliava.

Così per moltiplicare per 2 denari, i quali sono il dodicesimo di 2 soldi, dovrebbesi pigliare il dodicesimo di 32, ch'è 2, e avanzerebbe 8, che col carattere seguente 7 sarebbe 87; e in vece di pigliarne il dodicesimo, piglierebbesi il sesto, dicendo: il sesto di 8 è 1, e avanza 2, che con 7 fa 27; il sesto di 27 è 4, e resta 3, o $\frac{1}{6}$; ora, ogni sesto di soldo vale 2 denari: onde $\frac{1}{6}$ fanno *6* denari; si avrebbero dunque 2 lire, 14 soldi, *6* denari per lo prodotto de' due denari; e così ec.

IV. ESEMPIO. *Quanto vagliono 535 braccia $\frac{1}{4}$ a 3 lire, 4 soldi, 3 denari il braccio?*

	brac.		
535	$\frac{1}{4}$		
	lir.	sol.	den.
	3	4	3
1605			
107			
6		13	9
0		16	0 $\frac{3}{4}$
	lir.	sol.	den.
1719		9	9 $\frac{3}{4}$.

Lascio per ora di moltiplicare la frazione, e moltiplicando 535 per 3, ho 1605 lire.

Ora, 4 soldi sono la quinta parte d' una lira; onde piglio il quinto di 535, ed ho 107 lire.

Per moltiplicare per 3 denari, suppongo di dover moltiplicare per 2 soldi, e in tal caso sottraendo l'ultimo carattere da 535, avrei 53 lire, $\frac{5}{10}$, o 10 soldi per lo prodotto de' 2 soldi: ora, 3 denari sono l'ottavo di 2 soldi; piglio adunque l'ottavo di 53 lire, ch'è *6*, e avanzano 5 lire, che si dovrebbero raddoppiare per aver 10 decine, le quali sommate al doppio 10 dell'ultimo carattere sarebbero 110, di cui mi converrebbe pigliar l'ottavo; ma a fine di non raddoppiare, lascio sussistere il residuo 5, e l' ultimo carattere 5, il che fa 55, cioè la metà di 110; e piglio il quarto di 55, non più l'ottavo; perocchè il quarto della metà è uguale all'ottavo del tutto: ora, il quarto di 55 soldi è 13, e avanza 3, o $\frac{3}{4}$, che vagliono *9* denari, perocchè ogni quarto di soldo vale 3 denari; io ho dunque *6* lire, 13 soldi, *9* denari per lo prodotto de' 3 denari.

Or ci resta ancora a moltiplicare pel quarto di braccio lasciato da parte. Perchè dunque il valore d' un braccio è di 3 lire, 4 soldi, 3 denari, quello d' un quarto non sarà che'l quarto di 3 lire, 4 soldi, 3 denari; dico pertanto: il quarto di 3 lire è zero di

lire,

lire, e avanzano 3 lire, o 60 ſoldi, i quali ſommati a' 4, che ſeguono, fanno 64; il quarto di 64 ſoldi è 16 ſoldi; il quarto di 3 denari è zero di denari, e ſcrivo il reſiduo $\frac{3}{4}$.

Sommo tutt'i prodotti trovati, ed il prodotto totale 1719 lire, 9 ſoldi, 9 denari $\frac{3}{4}$ è 'l valore delle 535 braccia $\frac{1}{4}$.

Della Diviſione compoſta.

53. La Diviſione compoſta imbarazzerebbe molto ſe ſi doveſſe fare mediante le parti aliquote, ſpezialmente quando 'l dividendo, e 'l diviſore foſſero numeri compoſti; quindi è, che prima di fare l'operazione, riduceſi il tutto a minori ſpezie, come ſi vedrà ne' ſuſſeguenti eſempj, i quali ſerviranno di prova agli eſempj della moltiplicazione compoſta, che ora eſpoſi.

PRIMO ESEMPIO. *Furono date ad un' Operajo 1642 lire, 10 ſoldi pel lavoro di 365 pertiche; quanto valerà egli la pertica?*

Il prodotto 1642 lire, 10 ſoldi riſulta dall'avere moltiplicato le 365 pertiche pel prezzo d'una pertica; onde, ſe divido 'l prodotto 1642 lire, 10 ſoldi pel numero da moltiplicarſi 365, il quoziente ſarà il moltiplicatore, o 'l valor della pertica, che ſi ricerca (*N.*28.).

Prima di fare la diviſione, riduco le lire in ſoldi, vale a dire moltiplico 1642 per 20, a cagione, ch' ogni lira vale 20 ſoldi; ed ho 32840, a cui giugnendo i 10 ſoldi, la ſomma è 32850 ſoldi; e queſta ſi è 'l dividendo.

```
 lir.
1642                    365
 ſol.
  20                     20
-----                  -----
32840                  7300 Diviſore.
   10
32850   Dividendo.

 7300                  7300
              lir.                 ſol.
32850 (4               73000 ( 10
--------               ----------
 3650                  00
   20                  0
-----
  ſol.
73000
```

Ora, perchè il dividendo è diventato 20 volte più grande dopo queſta

questa moltiplicazione, anche il quoziente diverrebbe 20 volte più grande di quello sarebbe, se non avessi aumentato il dividendo; imperciocchè, quanto il dividendo è più grande, tanto più il divisore è contenuto in esso, e però il quoziente diviene più grande: quindi è, ch'io moltiplico il divisore per lo stesso numero 20, che ha moltiplicato il dividendo; così 'l dividendo, e'l divisore sono ancora tra loro, come se non gli avessi moltiplicati (*N.* 33.), e in conseguenza il quoziente esser dee quel medesimo, che sarebbe, se non avessi fatto alcuna moltiplicazione.

Perocchè dalla moltiplicazione di 365 per 20 risulta il prodotto 7300, divido 32850 per 7300, ed il quoziente è 4 lire con un residuo 3650, o sia $\frac{3650}{7300}$, ch'è una frazione di lira, e che però equivale a 3650 lire da dividersi per 7300; riduco queste lire in soldi, moltiplicandole per 20, il che mi dà 73000 soldi, e dividendo questa somma pel divisore 7300, ho 'l quoziente 10 soldi: così 'l prezzo della pertica è 4 lire, 10 soldi, e ciò serve di prova al primo esempio della moltiplicazione composta.

Avrei potuto far di meno di moltiplicare il divisore 365 per 20, e allora, facendo la divisione, il quoziente avrebbe contenuto de' soldi, perchè ne avrebbe contenuto anche il dividendo, e perchè il divisore non sarebbe stato accresciuto a proporzione di esso dividendo; così io avrei avuto 90 soldi: ora, per ridur questi in lire, mi conviene dividerli per 20, cioè cercare quante volte 20 soldi, od 1 lira entra in 90 soldi, e per conseguenza sottraendo l'ultimo carattere 0, avrei preso la metà di 9, ch'è 4 lire, e sarebbe avanzato 1, che col 0 tolto avrebbe fatto $\frac{10}{20}$, ovvero 10 soldi; ed avrei avuto 4 lire, 10 soldi pel prezzo della pertica: ma quantunque questo metodo sia più breve, tuttavolta, perchè in certi casi sarebbe incomodo, ho stimato meglio d'appigliarmi al primo, ch'è universale, come vedremo ne' susseguenti esempj.

```
  365
32850 ( 9.0 fol.
 0000   4 lir. 10
    0
```

54. Dobbiamo avvertire, che quando si moltiplica per un numero, il cui ultimo carattere a destra sia un zero, si dovrebbero moltiplicare tutti i caratteri del numero da moltiplicarsi per zero, e necessariamente si avrebbe, come apparisce dalla Tavola, una fila di zeri; dopo ciò, si dovrebbe moltiplicare il numero da moltiplicarsi 1642 pel secondo carattere 2 del mol-

```
 1642      1642
   20        20
 0000     32840
3284
32840
```

moltiplicatore, e collocar il prodotto sotto la fila de' zeri, cominciando a scrivere sotto le decine: ma per maggior brevità non si scrive che un zero sotto le unità, ed accanto a questo zero scrivesi il secondo prodotto 3284, il che mi dà lo stesso prodotto totale, come se avessi scritto tutta la serie de' zeri trovati.

Similmente, per moltiplicare 1642 per lo moltiplicatore 200, che ha 2 zeri da dritta a sinistra: in vece di scriver una fila di zeri pel primo zero, indi una seconda fila pel secondo, poi una terza per lo prodotto 3284, si scriveranno semplicemente due zeri, l'uno de' quali si porrà sotto l'unità, e l' altro sotto le decine, e accanto a questi si collocherà il prodotto 3284; cioè cominciando a scrivere sotto'l posto delle centinaja; imperocchè così facendo, il prodotto 3284 avrà sempre il medesimo valore, e'l prodotto totale sarà sempre l'istesso.

```
  1642        1642
   200         200
------      ------
  0000      328400
 0000
3284
------
328400
```

II. ESEMPIO. 535 *pertiche di lavoro hanno costato* 3036 *lire*, 2 *soldi*, 6 *denari*; *quanto viene a costare una pertica?*

Per fare questa divisione, riduco la lire in soldi, moltiplicandole per 20, il che mi dà 60720 soldi, a' quali giugnendo i 2 soldi, ho la somma 60722. Riduco questi soldi in denari, moltiplicandoli per 12, il che mi dà 728664 denari, a' quali giugnendo i 6 denari, ho la somma 728670; e questa si è'l dividendo.

Ora questo dividendo, essendo stato moltiplicato per 20, e per 12, è divenuto molto più grande di quello conviene per

```
  3036                      535
    20                       20
------                   ------
 60720                    10700
     2                       12
------                   ------
 60722                    21400
    12                    10700
------                   ------
121444                   128400 Divisore.
 60722
------
728664
     6
------
728670 Dividendo.

128400                   184000
          lir.                       sol.
728670(5                1733400(13
--------                ---------
 86670                   449400
    20                   ------
------                    64200
1733400                      12
                         ------
                         128400
                          64200
                         ------
                         770400

128400
          den.
770400(6
--------
000000
```

per rispetto al divisore, e in conseguenza 'l quoziente diverrebbe più grande di quello dovrebbe essere, per esprimer delle lire; quindi è, che per conservare il rapporto del dividendo al divisore, moltiplico anche il divisore per 20 e per 12, ed ho il prodotto 128400.

Divido 728670 per 128400, e'l quoziente è 5 lire; imperocchè, quantunque io abbia ridotto il numero da moltiplicarsi in denari, tuttavia, perchè ho moltiplicato il divisore per 20 e per 12, egli è come se nulla avessi fatto, e per conseguenza io debbo avere delle lire al quoziente; e la frazione, che resta, $\frac{86670}{128400}$ è una frazione di lire.

Valuto questa frazione, moltiplicando il suo numeratore per 20, perchè la lira contiene 20 soldi (*N.* 40.), e divido il prodotto 1733400 per lo denominatore 128400; ed il quoziente è 13 soldi più una frazione de' medesimi $\frac{64200}{128400}$.

Valuto questa seconda frazione, moltiplicando il suo numeratore per 12, perchè il soldo contiene 12 denari, e divido il prodotto 770400 per lo denominatore 128400; il che mi dà *6* denari senz' alcun residuo. Così una pertica vale 5 lire, 13 soldi, *6* denari; e ciò serve di prova al secondo esempio della moltiplicazione composta.

III. ESEMPIO. *327 pertiche, 3 piedi, 6 pollici hanno costato 1135 lire, 12 soldi, 5 denari $\frac{1}{3}$; quanto s' è pagata ogni pertica?*

Riduco il dividendo 1135 lire, 12 soldi, 5 denari $\frac{1}{3}$ in soldi, moltiplicando le lire per 20; e 'l prodotto è 22700 soldi, a' quali giugnendo i 12 soldi, ho la somma 22712: riduco questi soldi in denari, moltiplicandoli per 12; e 'l prodotto è 272544 denari, a' quali giugnendo i 5 denari, ho la somma 272549: riduco finalmente questi denari in terzi, moltiplicandoli per 3; ed ho di prodotto 817647, a cui giugnendo un terzo, che ho, la somma è 817648 terzi di denari.

Riduco parimente il divisore 327 pertiche, 3 piedi, *6* pollici in piedi, moltiplicando 327 per *6*, perchè la pertica contiene *6* piedi; e 'l prodotto è 1962 piedi, a cui giugnendo

i 3 piedi, ho la somma 1965: riduco questi piedi in pollici, moltiplicandoli per 12, perchè il piede contiene 12 pollici: e 'l prodotto è 23580, a cui giugnendo i 6 pollici, la somma è 23586.

Ora dunque, mediante tutte quest' operazioni, il dividendo e 'l divisore sono ridotti alle loro minime spezie; ma per conservare infra loro lo stesso rapporto, che aveano prima

```
1135
  20
-----
22700
   12
-----
22712  soldi
   12
-----
45424
22712
------
272544
     5
------
272549  denari
     3
------
817647
     1
------
817748  terzi
     6
-------
4905888  dividendo
```

```
   327
     6
------
  1962
     3
------
  1965  piedi
    12
------
  3930
 1965
------
 23780
     6
------
 23786  piedi
    20
------
471720
     3
-------
1415160  divisore
```

che si moltiplicassero, procuro di fare in modo, che si trovino ugualmente moltiplicati per gli stessi numeri: quindi è, ch'io moltiplico i terzi de'denari per 6, e i pollici per 20 e per 3, perchè le 327 pertiche sono state moltiplicate per 6, e perchè le 1135 lire sono state moltiplicate per 20, e per 3; così trovandosi il dividendo, e'l divisore moltiplicati l'uno e l'altro per 20, 12, 6, e 3, essi sono fra loro, come se non gli avessi moltiplicati.

Fatte queste moltiplicazioni, divido'l dividendo 4905888 pel divisore 1415160, e continuando l'operazione, come feci nel precedente esempio, trovo 3 lire, 9 soldi, 4 denari pel prezzo d'una pertica; e ciò serve di prova al terzo esempio della moltiplicazione composta.

```
1415160
4905888 ( 3 lir.
-------
 660408
     20
--------
13208160
```

```
 1415160
13208160 ( 9 sol.
--------
  471720
      12
--------
  943440
 471720
--------
 5660640
```

```
1415160
5660640 ( 4 den.
-------
 000000
```

IV. ESEM-

IV. ESEMPIO. *Uno, per comprare 535 braccia $\frac{1}{4}$ di ſtoffa, ha ſpeſo 1719 lire, 9 ſoldi, 9 denari $\frac{1}{4}$; quanto al braccio è egli venuto a pagare queſta ſtoffa?*

Riduco le lire in ſoldi, i ſoldi in denari, e i denari in quarti, il che mi dà 1650711 quarti di denari; riduco parimente le braccia in quarti, e mi danno 2141 quart. di brac.

1719 *lir. 9 ſol 4 den.*
20
34380
9
34389 *ſol.*
12
68778
34389
412668
9
412677
4
1650708
3
1650711 *quar. di den.*

535 *brac.* $\frac{1}{4}$
4
2140
1
2141 *quar. di brac.*
20
42820
12
85640
42820
513840 *diviſore*

513840
1650711 (3 *lir.*
109191
20
2183820

513840
2183820 (4 *ſol*
128460
12
256920
128460
1541510

513840
1541520 (3 *den*
0000000

Ora, perchè le braccia non ſono ſtate moltiplicate che per 4, là dove le lire ſono ſtate moltiplicate per 20, per 12, e per 4, io moltiplico i 2141 quart. di bracc. per 20, e per 12, acciò 'l dividendo e'l diviſore conſervino fra loro lo ſteſſo rapporto, che aveano prima che ſi moltiplicaſſero; ed ho i prodotti 1650711 per dividendo, e 513840 per diviſore.

Divido il dividendo pel diviſore, e valutando al ſolito le frazioni, ho 3 lire, 4 ſoldi, 3 denari pel valore d'un braccio; e ciò ſerve di pruova al quarto Eſempio della moltiplicazione compoſta.

55. Queſto ſarebbe il luogo di ſpiegare l'altre operazioni dell' Aritmetica; ma ſiccome le dimoſtrazioni di queſte regole dipendono da' principj, che ſi daranno ne' ſuſſeguenti Capitoli, così quì non ne farò parola, ſerbandomi poi a parlarne, dove mi parrà più a propoſito, onde trattare queſta materia con brevità, e chiarezza.

CAPITOLO QUINTO.

DELL' ALGEBRA.

56. La difficoltà, il tedio, e spesse volte ancora l' impossibilità che s' incontra nel risolvere moltissime questioni, e problemi, i quali risguardano i numeri, quando vogliamo servirci delle regole ordinarie dell' Aritmetica, furono motivo, perchè s' abbia cercato un'altro metodo, onde col mezzo di principj più semplici arrivassimo a scoprire le verità proposte senza molto stancare lo spirito. Fu questo metodo da' suoi primi Autori chiamato *Aritmetica speziosa*, o *Logistica speziosa*; e siccome questa non avea altro oggetto che i numeri, alcuni si servivano de'caratteri ordinarj con le lettere dette *Majuscole* a imitazione di *Diofanto* d'Alessandria, ed altri a imitazion del *Vieta* non si servivano che di lettere majuscole. I precetti di questa scienza erano assai semplici, e naturali; ma il modo oscuro, con cui spiegavasi la maggior parte delle cose, le denominazioni barbare, che si davano a certe quantità, e l'espressioni imbrogliate, che adoperavansi, la resero talmente dispiacevole, che pochissimi erano coloro, i quali s' inducessero a studiarla. Finalmente Mr. Descartes, non solo liberolla da tutto ciò, che la rendea sì rude, col dare denominazioni più facili, espressioni più corte, e sostituendo le lettere picciole dell' Alfabeto, in vece delle grandi; ma eziandio la perfezionò, e l'estese alla quantità continua, ch'è l'oggetto della Geometria. Questo è quel metodo da noi chiamato *Analisi* per le ragioni, che addurremo nel seguente capitolo, ove si metteranno in chiaro le sue regole, e la maniera di porle in uso.

57. L'*Algebra* è una scienza, ch' insegna a fare l' operazioni dell' Aritmetica con le lettere dell' alfabeto.

58. Ora, avendo i caratteri, che s' adoperano nell' Aritmetica, un valore determinato, è manifesto, che se si voglion o sommare, o sottrarre, o moltiplicar, o dividere, possono trovarsi degli altri caratteri, i quali rappresentino la loro somma, o residuo, il loro prodotto, o quoziente. Ma non è così delle lettere dell'alfabeto: imperocchè, siccome noi possiamo supporre, che la lettera a, o b rappresenti un numero ora maggiore, ed ora minore, secondo le differenti quistioni, che si vogliono risolvere; così non si potrebbe dire, ch' una

terza

terza lettera c, ovvero d sia la lor somma, o residuo, ec. senza fare supposizioni molto imbrogliate, e ciò spezialmente, quando 'l calcolo fosse troppo lungo. Quindi è, che si sono trovati de' segni, i quali non solo ci levano da tale imbarazzo; ma mettono in oltre tanta chiarezza nell'operazioni, che dopo risoluta la proposta questione, vedesi in un batter d'occhj, e donde siam partiti, e tutti i passi, ch'abbiamo fatti: Questi segni sono i seguenti.

De' segni dell'Algebra.

59. Il segno $+$ significa *più*, ed esprime l'addizione; $a + b$ mi mostra, che la grandezza espressa dalla lettera b è sommata alla grandezza espressa dalla lettera a.

60. Il segno $-$ significa *meno*, ed esprime la sottrazione; $a - d$ mi mostra, che la lettera d è sottratta dalla grandezza a.

61. Il segno $\times$ indica la moltiplicazione; $a \times b$ mi mostra, che la grandezza a è moltiplicata per la grandezza b. Si suole togliere questo segno, ed unire soltanto insieme le lettere, che si vogliono moltiplicare. Così ab significa, che a è moltiplicata per b.

62. Qualora il segno — trovasi infra due, o più lettere, le une superiori, e l'altre inferiori, s'intende, che le superiori son divise dall' inferiori. $\frac{a}{b}$ dinota, che la grandezza a è divisa per la grandezza b; $\frac{ab}{cd}$ dinota, che'l prodotto di a per b è diviso per lo prodotto di c per d; $\frac{a+d}{c-b}$ dinota, che la somma delle due quantità a, d è divisa per c senza b, o sia per la differenza di c a b; altro non essendo questa differenza che ciò, ch' avanza, dopo levata la grandezza b dalla grandezza c.

63. Il segno $=$ significa, che la grandezza, ch' è a sinistra di esso segno, è uguale a quella, ch'è a destra. $a = b$ dinota, che a è uguale a b; $ab = cd$ dinota, che 'l prodotto di a per b è uguale al prodotto della grandezza c per la grandezza d; $a + b = c + d$ dinota, che la somma delle grandezze a, b è uguale alla somma delle grandezze c, d, e così dell'altre; trovasi in alcuni Autori, in vece del segno $=$, il segno $\propto$; ma presentemente il primo è più in uso.

64. Per *Equazione*, od *Egualità* s' intendono due grandezze fra loro uguali. Dicesi primo *membro* dell'Equazione la grandezza, ch' è a

è a deſtra del ſegno $=$; e ſecondo *membro* ſi dice quella grandezza, ch'è a ſiniſtra di eſſo ſegno. Nell'Equazione $a = b$, la grandezza a è 'l primo membro, e b il ſecondo; ſimilmente, nell' Equazione $a + b = c - d$, la grandezza $a + b$ è il primo membro, e $c - d$ il ſecondo; e così dell'altre.

65. Il ſegno $>$ ſignifica, che la grandezza, ch'è a ſiniſtra di queſto ſegno, è maggiore di quella, ch'è a deſtra. $a > b$ dinota, che a è maggiore di b; $a + b > e + f$ dinota, che $a + b$ è maggiore di $e + f$.

66. Il ſegno $<$ ſignifica tutto all'oppoſto, cioè che la grandezza poſta a ſiniſtra è minore della grandezza poſta a dritta. $a < b$ dinota, che a è minore di b.

67. Queſti ſono i ſegni più frequenti dell'Algebra; ſpiegheremo poi gli altri a ſuo luogo.

Delle grandezze compleſſe ed incompleſſe, poſitive e negative.

68. Grandezza, generalmente parlando, diceſi tutto quello, ch'è capace d'accreſcimento, o diminuzione; o ciò, che ha parti. Eſſa è di due ſorte, l'una *ſucceſſiva*, e l'altra *permanente*: quella ſi chiama grandezza *ſucceſſiva*, le cui parti ſi ſuccedono le une all'altre, ſenza che mai poſſano eſiſtere inſieme, come la durata, o 'l tempo; e l'altra ſi dice *permanente*, perchè le ſue parti eſiſtono nel medeſimo tempo. Queſta in oltre divideſi in grandezza, o quantità *diſcreta*, e in grandezza, o quantità *continua*: le parti della grandezza, o quantità *diſcreta* ſono ſeparate, come i numeri, e tutte le coſe, dove neceſſario non è il legamento, e la continuazione delle parti; e quelle della grandezza *continua* ſono fra loro ſtrettamente congiunte, come tutte le coſe materiali. Quindi è, che s' ha dato il nome di *grandezza* in generale alle lettere, di cui l'Algebra ſi ſerve, perch'ella può far uſo del ſuo calcolo ſopra queſte differenti ſpezie di grandezze.

69. La grandezza *compleſſa* è una grandezza compoſta di due, o più grandezze, fra cui trovanſi i ſegni $+$, o $-$; così $a+b$ è una grandezza compleſſa, non meno che $a+c-d$. Ma ab non è tale, benchè ſia formata dal prodotto di due lettere; non eſſendovi fra eſſe alcuno de' due ſegni $+$, o $-$.

70. La grandezza *incompleſſa* è quella, che non è congiunta con una,

una, o più grandezze mediante i segni $+$, o $-$. Così a è una grandezza incomplessa, non meno che 'l prodotto ab.

71. La grandezza *positiva*, o *reale* è una grandezza, la quale od ha il segno $+$, o non ne ha alcuno, perchè allora vi si sottintende il segno $+$. Ordinariamente, in un'espressione algebraica, la prima lettera non ha alcun segno; onde scrivesi $a+b$, in vece di $+a+b$: ma se questa prima lettera avesse il segno $-$, bisognerebbe necessariamente scrivere $-a+b$; altrimenti alla lettera a sottintenderebbesi il segno $+$, il che sarebbe falso.

72. La grandezza *negativa*, o falsa è una grandezza, che ha il segno $-$, e che meglio direbbesi un difetto di grandezza. Uno, il quale oltre a non aver niente abbia 10 scudi di debito, ha meno ancora di nulla, perocchè chi volesse, ch'e' pagasse il suo debito, e con ciò fare, che'l suo avere fosse uguale a zero, li dovrebbe dare 10 scudi; così i 10 scudi, de' quali egli è debitore, sono una grandezza negativa, o un difetto, che lo rende inferiore a nulla. Similmente, una lunghezza di 70 pertiche paragonata a un'altra di 80 è uguale ad 80 meno dieci, cioè sarebbe d'uopo aggiugnere ad essa 10 per renderla uguale ad 80: questo 10 adunque, che non ha, è per essa una grandezza negativa, o un difetto; e così dell' altre. Ne credasi, che un sì fatto parlare sia proprio solo dell'Algebra; dicendosi continuamente nelle conversazioni, e non male: ch'un uomo ha cent'anni meno due, ch'un altro ha venti scudi meno dieci soldi, ec.

Dell' Addizione delle grandezze letterali.

73. Per sommare due, o più grandezze incomplesse, elle si scrivono l'une dopo l'altre co' loro segni: per sommare $+a$ con $+b$, od a con b, scrivesi $a+b$; per sommare le quattro grandezze positive a, b, c, d, scrivesi $a+b+c+d$; e per sommare le tre grandezze a, b, $-d$, di cui l'ultima è negativa, scrivesi $a+b-d$, e non $+d$, a cagione ch'aggiugnere un difetto, egli è torre una grandezza positiva: per esempio, se ho 20 scudi, e che mi venga imposto un debito di 10, egli è, come se mi levassero 10 scudi.

74. Se fra le grandezze incomplesse, che si vogliono sommare, trovansi di quelle, che sieno espresse da una medesima lettera, e che abbiano l'istesso segno, non si scrive questa lettera ch'una sol volta, ed a sinistra ponesi il carattere aritmetico, ch' accenni il numero delle grandezze espresse dalla stessa lettera. Per sommare

le

le grandezze a, a, a, b, b, scrivesi $3a + 2b$, in vece di $a + a + b + b$, e ciò si dice *correggere*, od *abbreviare* l' espressione, cioè renderla più semplice e chiara; il che si dee sempre avvertire, perocchè la semplicità dell' espressioni fa che si ricerchi minor attenzione, e molto contribuisce alla chiarezza dell' idee.

Che se tra le grandezze espresse da un'istessa lettera, alcune avessero il segno +, ed altre il segno —, si piglierebbero i numeri, i quali esprimono quante ne sono, che hanno il segno +, e quante, che hanno il segno —, e sottraendo l'ultimo dal primo, scriverebbesi una volta la lettera, ch' esprime l' una di queste grandezze, e a sinistra della stessa 'collocherebbesi il residuo della sottrazione; così per sommare le grandezze a, a, a, a, $-a$, $-a$, scriverebbesi $-2a$; imperocchè avendo le quattro prime il segno +, farebbero $4a$, o sia $+4a$, e le due ultime avendo il segno —, farebbero $-2a$: ora, tanto è dire $4a - 2a$, come dir di sottrarre $2a$ da $4a$, il che fa $+2a$; e in conseguenza $4a - 2a$ sarebbero uguali a $+2a$, ovvero semplicemente a $2a$. Per esempio, se ho 4 scudi, e che mi s'imponga un debito di 2, non resto che con 2 scudi.

Finalmente, se 'l numero, ch'esprime quante sono le grandezze, che hanno il segno +, e che sono espresse dall'istessa lettera, è minore di quello, ch' esprime quante ne sono, che hanno il segno —, e che sono altresì espresse dalla medesima lettera, non si potrà togliere questo secondo numero dal primo; ma si dovrà sottrarre il primo dal secondo, e scrivere il residuo col segno —. Così per sommare le grandezze a, a, $-a$, $-a$, $-a$, $-a$, le due prime faranno $2a$, ovvero $+2a$, perchè hanno il segno +; e le quattro ultime, perchè hanno il segno —, faranno $-4a$. Così sommando $2a$ con $-4a$, avrebbesi $2a - 4a$, o $-2a$; imperocchè, se ho 2 scudi, e che mi venga imposto un debito di 4, è manifesto, che dopo dati i 2 scudi, ch'io avea, sarò debitore di altri 2.

Bisogna esser diligenti in fare tali correzioni, perchè altrimenti il calcolo algebraico riuscirebbe non poco imbrogliato, e incomodo.

L' addizione delle grandezze complesse non differisce da quella delle grandezze incomplesse; basta solo porre attenzione a quanto s' è detto.

Per sommare $a + b$ con $c + d$, scrivesi $a + b + c + d$. Similmente, per sommare $a+b$ con $c-f$, scrivesi $a+b+c-f$.

Per

Per sommare $4a + 2b + d$ con $3a + 3b + e$, scrivo le grandezze espresse dalle stesse lettere le une sotto l'altre, poi dico: $4a$ e $3a$ fanno $7a$; $2b$ e $3b$ fanno $5b$; e finalmente scrivo $+ d + e$.

$$\begin{array}{l} 4a + 2b + d \\ 3a + 3b + e \\ \hline 7a + 5b + d + e \end{array}$$

Per sommare $8a + 5b + d$ con $5a - 2b - f$, scrivo le grandezze espresse dalle stesse lettere le une sotto l'altre, poi dico: $8a$ e $5a$ fanno $13a$; $5b$ meno $2b$ fanno $+ 3b$; e finalmente scrivo $+ d - f$.

$$\begin{array}{l} 8a + 5b + d \\ 5a - 2b - f \\ \hline 13a + 3b + d - f \end{array}$$

Per sommare $5a + 2b + f$ con $6a - 3b - f$, scrivo le grandezze, che hanno lo stesso nome, le une sotto l'altre, dicendo: $5a$ meno $6a$ fanno un'a, o $- a$; $2b - 3b$ fanno meno un b, o $- b$; $f - f$ equivale a zero, perciocchè ricevendo un, e dando un, nulla avanza; così la somma è $- a - b$, e l'istesso si dica dell'altre.

$$\begin{array}{l} 5a + 2b + f \\ - 6a - 3b - f \\ \hline - a - b \end{array}$$

Della sottrazione delle grandezze letterali.

75. La sottrazione delle grandezze letterali incomplesse si fa, cangiando sempre nel suo contrario il segno della grandezza, che dee esser sottratta.

Per sottrarre $+ a$ da $+ b$, scrivesi $b - a$; imperocchè da 10 scudi togliendone 4, ne restano $10 - 4$.

Per sottrarre $+ c$ da $- d$, scrivesi $- d - c$; perocchè se debbo dieci scudi, e che mi s'accresca il debito d'altri 5, ovvero che mi s'imponga un debito di 5 scudi, è manifesto, che dovrò pagare $10 + 5$; e in conseguenza il mio avere sarà diminuito non solo di 10, ma anche di 5.

Se voglio sottrarre $- a$ da $+ b$, scrivo $b + a$; perciocchè se ho 10 scudi, e che mi si sottragga un debito di 4, il che non può farsi che col darmi 4 scudi, è certo, ch'io avrò 14 scudi, ovvero 10 scudi più 4.

Per sottrarre $- a$ da $- b$, scrivesi $+ b + a$; perciocchè se debbo 10 scudi, e ch'alcuno paghi parte del mio debito, per esempio 4 scudi, il che non può fare, se non se col darmi 4 scudi, è infallibile, che sarò debitore di 10, ma è vero ancora, che ne avrò 4; e così io avrò $- 10 + 4$.

76. La Sottrazione delle grandezze complesse non differisce da

quella delle grandezze incompleſſe: baſta ſolo porre attenzione a quello s'è detto di ſopra, circa la correzione dell'eſpreſſioni.

Per ſottrarre $a + b$ da $c + d$, ſcriveſi $c + d - a - b$. Similmente, per ſottrarre $a - c$ da $d - f$, ſcriveſi $d - f - a + c$, e così dell'altre.

Per ſottrarre $2a + 2b + c$ da $5a + 4b + d$, ſcrivonſi le grandezze eſpreſſe dalle ſteſſe lettere l'une ſotto l'altre, dicendo: da $5a$ ſottraendo $2a$, avanzano $3a$; da $4b$ ſottraendo $2b$, avanzano $2b$; e da d ſottraendo c, avanza $d - c$.

$$\begin{array}{r} 5a + 4b + d \\ 2a + 2b + c \\ \hline 3a + 2b + d - c \end{array}$$

Per ſottrarre $3a - 4b - 2d$ da $6a + 2b - 4d$, dico: da $6a$ ſottraendo $3a$, avanzano $3a$; da $2b$ ſottraendo $- 4b$, avanzano $6b$, perciocchè dovendoſi cangiare il ſegno $-$ in $+$, ho $2b + 4b = 6b$; finalmente, da $- 4d$ ſottraendo $- 2d$, avanzano $- 2d$, imperocchè dovendoſi cangiare il ſegno di $- 2d$ in $+ 2d$, ho $- 4d + 2d$: ma $+ 2d$ cancellano $- 2d$ da $- 4d$, a cagione che i ſegni $-$ e $+$ reciprocamente ſi tolgono; onde avanzano $- 2d$.

$$\begin{array}{r} 6a + 2b - 4d \\ 3a - 4b - 2d \\ \hline 3a + 6b - 2d \end{array}$$

Per ſottrarre $6a + 4b - 3d$ da $4a + 3b - 2d$, dico: da $4a$ ſottraendo $6a$, avanzano $- 2a$, perciocchè $4a - 6a$ equivagliono a $- 2a$, eſſendovi nella grandezza $- 6a$ la grandezza $- 4a$, che cancella la grandezza $+ 4a$, ed avanzano $- 2a$; da $3b$ ſottraendo $4b$, avanza $- b$; e da $- 2d$ ſottraendo $- 3d$, avanza $+ d$, imperocchè dovendoſi cangiare il ſegno di $- 3d$ nel ſuo contrario, ho $- 2d + 3d$: ora, in $+ 3d$ ſonvi $2d$, che cancellano $- 2d$, e avanza ancora un d; onde io ho $+ d$, e così dell'altre.

$$\begin{array}{r} 4a + 3b - 2d \\ 6a + 4b - 3d \\ \hline - 2a - b + d \end{array}$$

Della Moltiplicazione delle grandezze latterali.

77. Se le due grandezze, che ſi vogliono moltiplicare fra loro, hanno tutte due il ſegno $+$, o tutte due il ſegno $-$, il prodotto ha ſempre il ſegno $+$; e ſe l'una ha 'l ſegno $+$, e l'altra il ſegno $-$, il prodotto ha ſempre il ſegno $-$. Dal che ſi deduce queſta regola: ***Più in più, o meno in meno dà più; e più in meno, o meno in più dà meno.***

DIMOSTRAZIONE. S'è detto (*N.* 11.), che nella moltiplica-

plicazione si dee pigliare il numero da moltiplicarsi tante volte, quante sono l'unità, che si contengono nel moltiplicatore. Onde 1°. supponendo, che'l numero da moltiplicarsi sia a e'l moltiplicatore b, e che l'uno e l'altro sieno positivi, si dovrà pigliar la grandezza positiva a tante volte, quante sono l'unità, che si contengono nella grandezza positiva b; e perciò, se b contiene 3 unità, il prodotto ab sarà la grandezza positiva $3a$, e in conseguenza ab avrà 'l segno più. 2°. Se'l numero a da moltiplicarsi è positivo, e'l moltiplicator b negativo, cioè s'egli è $-b$, o -3, dovrassi pigliar la grandezza positiva a non 3 volte, ma -3 volte; perciocchè il moltiplicatore non contiene 3 unità, ma -3 unità: così'l prodotto ab sarà uguale alla grandezza negativa $-3a$, e'l suo segno sarà negativo; perocchè pigliar una grandezza -3 volte, è un sottrarla 3 volte. 3°. Se'l numero a da moltiplicarsi è negativo, per esempio $-a$, e se'l moltiplicator b è positivo, dovrassi pigliar la grandezza negativa $-a$ tante volte, quante sono l'unità, che si contengono in b, o in 3; e in conseguenza il prodotto ab sarà uguale a $-3a$, e'l suo segno sarà ancora negativo. 4°. Finalmente, se a e b hanno tutti due il segno meno, si dovrà pigliar la grandezza negativa $-a$ non 3 volte, ma -3 volte; perciocchè b, o 3 avendo il segno meno, non contiene 3 unità, ma -3 unità. Ora, prendere una grandezza -3 volte, è un sottrarla 3 volte; e togliere 3 volte una grandezza negativa, o un debito, è dare 3 volte il necessario per iscontarlo: essendo impossibile, che si paghi un debito, se non viene dato, quanto si ricerca per ispegnerlo. Onde pigliar -3 volte la grandezza negativa $-a$, è dare $3a$; e in conseguenza il prodotto ab è uguale a $3a$, e'l suo segno è positivo. Dunque la regola data è vera.

78. Le grandezze complesse si moltiplicano in modo poco diverso da quello si moltiplicano i numeri, osservandosi in oltre le regole date circa i segni; ed eccone alcuni esempj.

PRIMO ESEMPIO. Per moltiplicare $a+b$ per $a+c$ scrivo 'l moltiplicatore $a+c$ sotto la grandezza da moltiplicarsi, e moltiplico tutt'i termini della grandezza da moltiplicarsi per lo primo termine a del moltiplicatore, dicendo: $+a$ per $+a$ mi dà $+aa$; $+b$ per $+a$ mi dà $+ab$; indi moltiplico tutt'i termini della grandezza da moltiplicarsi per lo secondo termine c del

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+c \\ \hline aa+ab+ac+bc \end{array}$$

moltiplicatore, e dico: $+a$ per $+c$ mi dà $+ac$, e $+b$ per $+c$ mi dà $+bc$; così 'l prodotto è $aa+ab+ac+bc$.

II. ESEMPIO. Per moltiplicare $a+b+c$ per $a+b+d$, scrivo 'l moltiplicatore $a+b+d$ sotto la grandezza $a+b+c$ da moltiplicarsi, e prima moltiplico tutt' i termini $a+b+c$ pel primo termine a del moltiplicatore, dicendo: $+a$ per $+a$ mi dà $+aa$; $+b$ per $+a$ mi da $+ab$, e $+c$ per $+a$ mi da $+ac$.

$$
\begin{array}{l}
a+b+c \\
\underline{a+b+d} \\
aa+ab+ac \\
\quad +ab \quad +bb+bc \\
\underline{\qquad\qquad\qquad +ad+bd+cd} \\
aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd
\end{array}
$$

Poscia li moltiplico per lo secondo termine b del moltiplicatore, dicendo: $+a$ per $+b$ mi dà $+ab$, e scrivo questo prodotto sotto al suo simile $+ab$, il che noi dobbiamo avvertire, qualora i prodotti abbiano le stesse lettere; $+b$ per $+b$ mi dà $+bb$, e $+c$ per $+b$ mi dà $+bc$.

Finalmente, moltiplicandoli pel terzo termine d del moltiplicatore, ho di prodotto $+ad+bd+cd$; e abbreviando l'espressione, cioè ponendo $+2ab$, in vece di $+ab+ab$, il prodotto è $aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd$.

III. ESEMPIO. Per moltiplicare $a+b$ per $a-b$, moltiplico i termini $a+b$ pel primo termine a del moltiplicatore, ed ho $aa+ab$. Poscia li moltiplico per lo secondo termine $-b$ del moltiplicatore, dicendo: $+a$ per $-b$ mi dà $-ab$, ch' io scrivo sotto $+ab$; e $+b$ per $-b$ mi dà $-bb$. Abbrevio l'espressione, cancellando $+ab-ab$, perocchè queste grandezze con segni contrarj reciprocamente si tolgono; e 'l prodotto è $aa-bb$.

$$
\begin{array}{l}
a+b \\
\underline{a-b} \\
aa+ab \\
\underline{\quad -ab-bb} \\
aa \qquad -bb
\end{array}
$$

IV. ESEMPIO. Per moltiplicare $a+b-c$ per $a-b+c$, moltiplico tutt' i termini $a+b-c$ del moltiplicando per lo primo termine a del moltiplicatore, ed ho $aa+ab$ $-ac$,

$$
\begin{array}{l}
a+b-c \\
\underline{a-b+c} \\
aa+ab-ac \\
\quad -ab \qquad -bb+bc \\
\underline{\qquad +ac \qquad +bc-cc} \\
aa \qquad\quad -bb+2bc-cc
\end{array}
$$

$- ac$. Indi moltiplicandoli per lo secondo termine $- b$ del moltiplicatore, ho $- ab - bb + bc$, e scrivo $- ab$ sotto $+ ab$. Finalmente, moltiplicandoli pel terzo termine $+ c$ del moltiplicatore, ho $+ ac + bc - cc$, e scrivo $+ ac$ sotto $- ac$, e $+ bc$ otto $+ bc$; abbrevio l' espressione, cancellando $+ ab - ab$, e $- ac + ac$ (perocchè queste grandezze con segni contrarj reciprocamente si tolgono) e ponendo $+ 2bc$, in vece di $+ bc + bc$; e 'l prodotto è $aa - bb + 2bc - cc$.

79. AVVERTIMENTO. Bisogna avvertire, che ne' prodotti di due, o più lettere, ogni lettera conserva il suo valore, o sia posta dopo l' altre, o infra due : così tanto è ab, come ba; similmente, i prodotti abc, bac, bca, cab, cba hanno sempre l' istesso valore. Come ancora i prodotti $ab + bc$, o $bc + ab$ sono uguali; e in ciò l' Algebra è molto differente dall' Aritmetica, in cui è impossibile di mutare il posto ad alcun carattere, se insieme non si cangia il suo valore.

Della Divisione delle grandezze letterali.

80. Tanto è de' segni + e — rispetto alla moltiplicazione, come rispetto alla divisione: cioè, se dividesi + per +, o — per —, il quoziente ha 'l segno +; e se dividesi + per —, o — per +, il quoziente ha 'l segno —.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, che 'l dividendo sia 6, e 'l divisor 2. 1.° Se tutti due hanno 'l segno +, il dividendo 6 conterrà positivamente il divisor 2 tre volte, e però il quoziente 3 avrà 'l segno +. 2.° Se tutti due hanno 'l segno —, la grandezza negativa $- 6$ conterrà positivamente 3 volte la grandezza negativa $- 2$; e in conseguenza il quoziente 3 avrà 'l segno +. 3.° Se 'l dividendo è -6, e 'l divisore $+ 2$, la grandezza negativa $- 6$ non conterrà 3 volte la grandezza positiva, ma trè volte la grandezza negativa di 2; così 'l quoziente 3 avrà 'l segno —. 4.° Se 'l dividendo è $+ 6$, e 'l divisore $- 2$, la grandezza positiva 6 non conterrà tre volte la grandezza negativa $- 2$, ma tre volte la sua contraria, ovvero la grandezza positiva 2; onde il quoziente 3 avrà 'l segno —.

E per restarne maggiormente convinti, basta osservare, che supposto il divisore esatto, ne segue per necessità, che 'l prodotto del divisore per lo quoziente sia uguale al dividendo (*N.* 29.). Il che sareb-

farebbe impoſſibile, ogni qual volta il quoziente non aveſſe il ſegno aſſegnatogli dalla noſtra regola; imperocchè nel primo caſo, ſe'l quoziente foſſe -3, il prodotto di -3 per lo diviſore $+2$ darebbe -6, quando 'l dividendo è $+6$. E nel ſecondo, ſe'l quoziente foſſe -3, il prodotto di -3 per lo diviſore -2 darebbe $+6$, là dove il dividendo è -6. Così nel terzo, ſe'l quoziente foſſe $+3$, il prodotto di $+3$ per lo diviſore $+2$ darebbe $+6$, e non -6. Finalmente nel quarto, ſe'l quoziente foſſe $+3$, il prodotto di $+3$ per lo diviſore -2 darebbe -6, in vece di $+6$.

81. Lo ſteſſo ancora avverrebbe, ſe'l diviſore non foſſe eſatto. Supponiamo, che'l dividendo ſia 7, e'l diviſor 2; il quoziente ſarà 3 con un reſiduo 1. Ora, ſe 7 e 2 ſono poſitivi, il quoziente eſſer dee poſitivo; perocchè $+3$ per $+2$ è uguale a più 6, il quale ſommato al reſiduo 1 fa $+7$ uguale al dividendo 7. E ſe 7 e 2 ſono negativi, il quoziente ſarà altresì poſitivo; perciocchè $+3$ per -2 fa -6, il quale giunto al reſiduo -1, ch'è negativo, perchè è il reſiduo di -7, dà la ſomma -7 uguale al dividendo -7. Ma ſe 7 è negativo, e 2 poſitivo, il quoziente avrà 'l ſegno $-$; perocchè -3 per $+2$ fa -6, il quale giunto al reſiduo 1, ch'è negativo, perchè è il reſiduo di -7, dà la ſomma -7 uguale al dividendo. Finalmente, ſe 7 è poſitivo e 2 negativo, il quoziente dee eſſer negativo; perocchè -3 per -2 fa $+6$, il quale giunto al reſiduo 1, ch'è poſitivo, perchè è il reſiduo di $+7$, dà la ſomma $+7$ uguale al dividendo.

82. Per dividere $+a$ per $+b$, ovvero $-a$ per $-b$, ſcriveſi $+\frac{a}{b}$, od $\frac{a}{b}$; e per dividere $-a$ per $+b$, o $+a$ per $-b$ ſcriveſi $-\frac{a}{b}$.

83. Se'l dividendo e 'l diviſore foſſero eſpreſſi da un' iſteſſa lettera a, ſcriverebbeſi $+1$, in vece di $\frac{a}{a}$; o -1, in vece di $-\frac{a}{a}$; perciocchè il quoziente 1 moltiplicato per lo diviſore $+a$ dà il dividendo a, e lo ſteſſo quoziente 1 moltiplicato per lo diviſore $-a$ dà il dividendo $-a$. Similmente, il quoziente -1 moltiplicato per lo diviſore $-a$ dà il dividendo $+a$, e'l quoziente -1 moltiplicato per lo diviſore $+a$ dà il dividendo $-a$.

Per

Per eſprimere la diviſione di ab per b, ſcriveſi ſemplicemente a, in vece di $\frac{ab}{b}$; perocchè il quoziente a moltiplicato per b dà il dividendo ab: così ancora, in vece di $\frac{aac}{aa}$, ſcriveſi c; in vece di $\frac{acb}{cb}$, ſcriveſi a, e così dell'altre; dal che ſi vede, che *quando vi ſono delle grandezze eſpreſſe dall'iſteſſe lettere, sì al dividendo, ch' al diviſore, eſſe ſi cancellano un numero di volte uguale da amendue le parti;* ne traſcurar ſi dee una tal regola, perch'ella abbrevia di molto l'eſpreſſioni. Quindi, in vece di $\frac{aabbc}{abc}$, ſcriveremo ab; in vece di $\frac{abc}{abd}$, ſcriveremo $\frac{c}{d}$; e in vece di $\frac{aabbcdef}{abbcde}$, ſcriveremo af; il che, quanto abbrevj l'eſpreſſione, e la rendi più chiara, facilmente ſi conoſce.

84. Se vi foſſero de' numeri a ſiniſtra del dividendo e del diviſore, eſſi ſi dividerebbero al ſolito, e ſcriverebbeſi il quoziente a ſiniſtra del quoziente letterale. Per abbreviare l'eſpreſſione $\frac{6aabbcd}{3abcd}$, dovrebbeſi dividere 6 per 3, il che darebbe 2, e ſcriver $2ab$; e per abbreviare l' eſpreſſione $\frac{9aacccd}{3acce}$, ſcriverebbeſi $\frac{3acd}{e}$, e così dell' altre.

Ma ſe la diviſione de' caratteri non poteſſe farſi eſattamente, eſſi ſi laſcierebbero ſuſſiſtere; e ſcriverebbeſi $\frac{7aab}{3a}$, in vece di $\frac{7aaab}{3a}$, ec.

85. La diviſione delle grandezze compleſſe poco ſi ſcoſta dalla diviſione ordinaria, e non ſi ha che oſſervare le regole date circa i ſegni $+$ e $-$; intanto io porterò quì alcuni eſempj, i quali ſerviranno di prova agli eſempj della moltiplicazione delle grandezze compleſſe.

PRIMO. ESEMPIO. Per dividere $aa+ab+ac+bc$ per $a+c$, tiro due linee, l'una ſotto al dividendo, e l'alrra a deſtra per collocarvi il quoziente; indi ſcrivo 'l diviſore $a+c$ ſotto al dividendo, collocando i ſuoi termini ſotto quelli del dividendo, che hanno

$$
\begin{array}{ll|l}
aa+ab & +ac+bc & a+b \\
\hline
a & +c & \\
\hline
+ab & +bc & \\
a & +c & \\
\hline
0 & 0 &
\end{array}
$$

le

le ſteſſe lettere, e dico: aa diviſo per $+a$ dà a al quoziente (N° 82.); moltiplico i caratteri del quoziente per lo diviſore, e ſottraendone il prodotto dal dividendo, dico: $+a$ per $+a$ fa $+aa$, e da $+aa$ levando $+aa$ nulla avanza; ſicchè io metto un punto ſopra'l termine aa del dividendo, per dinotare ch'è ſtato diviſo: $+a$ per $+c$ fa $+ac$, e dal termine $+ac$ del dividendo levando il prodotto $+ac$, null' avanza; ſicchè io metto un punto ſopra ac.

Tiro una linea ſotto $a+c$; ed abbaſſando i due termini $+ab+ac$ del dividendo, che non ſono ſtati diviſi, ſcrivo ſotto di loro il diviſore $a+c$, e dico: $+ab$ diviſo per $+a$ dà al quoziente $+b$; moltiplico queſto quoziente per $a+c$, e ſottraendone il prodotto dai termini $ab+bc$ del dividendo, null' avanza: onde il quoziente è $a+b$, e ciò ſerve di prova al primo eſempio della moltiplicazione delle grandezze compleſſe; perocchè in queſt' eſempio, il dividendo era 'l prodotto, e 'l diviſore era 'l numero, per cui ſi dovea moltiplicare; e per conſeguenza il quoziente $a+b$ ſarà ſtato il numero da moltiplicarſi.

II. ESEMPIO.

$$\dot{aa}+2\dot{ab}+\dot{ac}+\dot{bb}+\dot{bc}+\dot{ad}+\dot{bd}+\dot{cd}\ (\ a+b+d$$

$$a+b+c$$

$$+ab \qquad +bb+bc$$

$$a \qquad +b+c$$

$$+ad+bd+cd$$

$$+a+b+c$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

Per dividere $aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd$ per $a+b+c$, ſcrivo 'l dividendo e 'l diviſore, come feci nel precedente Eſempio, e poi dico: aa diviſo per $+a$ dà a al quoziente; moltiplico i termini $a+b+c$ del diviſore pel quoziente, e dico: a per $+a$ dà aa, e dal termine aa del dividendo levando aa, null' avanza; a per $+b$ dà ab: ora, dal termine $+2ab$ del dividendo levo ab, e ſcrivo di ſotto il reſiduo ab, ponendo un punto tanto ſopra $2ab$, come ſopra aa, per dinotare che ſono ſtati diviſi; a per $+c$ dà $+ac$, e dal termine $+ac$ del pividendo ſottraendo $+ac$, nul' avanza.

Abbaſ-

Abbaſſo i termini $bb + bc$ del dividendo, e ſotto ſcrivo il diviſore $a + b + c$; poi dico: $+ ab$ diviſo per a dà $+ b$ al quoziente; moltiplico queſto quoziente pel diviſore, e ſottraendone il prodotto dai termini $ab + bb + bc$, null' avanza; abbaſſo i tre ultimi termini $ad + db + cd$, e ſcrivendo il diviſore $a + b + c$, trovo $+ d$ al quoziente; termino al ſolito l'operazione, e null' avanza: onde il quoziente totale è $a + b + d$; e ciò ſerve di prova al ſecondo eſempio della moltiplicazione delle grandezze compleſſe.

86. AVVERTIMENTO. Pare talvolta, che la diviſione non poſſa farſi, perchè mancano al diviſore de' termini, che contengono alcuno di quelli del diviſore, allorchè trovaſi moltiplicato per lo quoziente; ma vi ſono certi caſi, in cui la diviſione diventa poſſibile, aggiugnendo al dividendo la grandezza, che li manca, una volta col ſegno $+$, e l'altra col ſegno $-$, il che punto non l'accreſce; i due ſuſſeguenti eſempj faranno meglio comprender ciò.

III. ESEMPIO. Per dividere $aa - bb$ per $a - b$, dico: aa diviſo per $+ a$ dà $+ a$ al quoziente. Moltiplico il diviſore per queſto quoziente, dicendo: a per $+ a$ dà $+ aa$, e dal termine aa del dividendo levando $+ aa$, niente reſta. a per $- b$ dà $- ab$: ora, nel dividendo non v' è alcun termine, che contenga il prodotto ab, e però egli pare, che la diviſione non poſſa

$$\begin{array}{l} aa - bb \;(\; a + b \\ \underline{a - b} \\ \hline + ab - bb \\ \underline{\;\;a - b} \\ \;\;0 \quad\;\; 0 \end{array}$$

farſi; ma ecco in qual modo io l'intraprendo. Suppongo, che'l dividendo, oltre i termini $aa - bb$, contenga i termini $+ ab - ab$, il che ne l' accreſce, ne lo diminuiſce; perocchè $+ ab - ab$ è uguale a zero; e dico: dal prodotto $- ab$ del dividendo levando il prodotto $- ab$ del quoziente pel carattere $- b$ del diviſore, null' avanza. Abbaſſo i due termini $+ ab - bb$ del dividendo, e di ſotto ſcrivo il diviſore; poi dico: $+ ab$ diviſo per a dà b al quoziente; moltiplicando adunque queſto quoziente pel diviſore $a - b$, ho'l prodotto $ab - bb$, il quale ſottratto da $ab - bb$, nulla reſta: onde il quoziente totale è $a + b$; e ciò ſerve di prova al terzo eſempio della moltiplicazione.

IV. ESEMPIO. Per dividere $aa - bb + 2bc - cc$ per $a - b + c$, dico: aa diviſo per $+ a$ dà $+ a$ al quoziente, e moltiplicando queſto diviſore per detto quoziente, avrò aa, che ſottratto da aa, null' avanza; a per $- b$ fa $- ab$, il quale ſottratto

da $- ab$, ch'io ſuppongo eſſere al dividendo, nulla reſta: ma perchè ho ſuppoſto al dividendo $- ab$, ciò che non è vero, così ſcrivo di ſotto $+ ab$, giacchè $+ ab - ab$, che aggiungo al dividendo, ne l'accreſcono, ne lo diminuiſcono. a per $+ c$ fa $+ ac$, e da $+ ac$, che

$$\begin{array}{l} aa - bb + 2bc - cc \;(\; a + b - c \\ \overline{a - b + c} \\ \quad + ab - ac - bb + 2bc \\ \quad\;\; a \qquad\quad - b + c \\ \quad\quad - ac \qquad + bc - cc \\ \quad\quad\;\; a \qquad\;\; - b + c \\ \quad\quad\;\; 0 \qquad\quad\;\; 0 \quad 0 \end{array}$$

ſuppongo eſſere al dividendo, ſottratto $+ ac$, nulla reſta; ma per mantenere l'uguaglianza, ſcrivo di ſotto $- ac$, ch'io oppongo a $+ ac$, che ho ſuppoſto al dividendo.

Abbaſſo accanto ai termini $+ ab - ac$ i termini $- bb + 2bc$ del dividendo, e di ſotto ſcrivo il diviſore; poi dico: ab diviſo per $+ a$ dà b al quoziente; moltiplico queſto quoziente pel diviſore, ed ho $+ ab$, che ſottratto da ab, null'avanza; b per $- b$ fa $- bb$, e ſottratto queſto prodotto da $- bb$, nulla reſta; b per $+ c$ dà $+ bc$; levo $+ bc$ da $+ 2bc$, e ſcrivo il reſiduo bc di ſotto.

Abbaſſo i termini rimanenti $- ac - cc$ del dividendo, ſcrivo di ſotto il diviſore, ed ho $- c$ al quoziente; proſeguiſco l'operazione al ſolito, e'l quoziente totale è $a + b - c$. E ciò ſerve di prova al quarto eſempio della moltiplicazione.

87. Se mediante tal'ipoteſi non ſi poteſſe fare la diviſione, ſcriverebbeſi il diviſore ſotto al dividendo a guiſa di frazione.

Delle Potenze delle grandezze incompleſſe.

88. Le *potenze* d'una grandezza ſono i differenti gradi, a' quali ella s'innalza moltiplicandola in ſe ſteſſa ſucceſſivamente 2, 3, 4 volte, ec. in infinito. Gli Antichi chiamavano prima *potenza* d'una grandezza il prodotto di detta grandezza moltiplicata in ſe ſteſſa, vale a dire il ſuo quadrato; ma preſentemente chiamaſi prima potenza la grandezza preſa in ſe ſteſſa. Così a è la prima potenza di a; moltiplico a per a, e'l prodotto aa è la ſeconda po-

potenza, o sia il *quadrato* di a; moltiplico aa per a, e 'l prodotto aaa è la terza potenza, o sia 'l cubo di a; e così a mano a mano: sicchè $aaaa$ è la quarta potenza, $aaaaa$ la quinta; e ciò in infinito.

89. La grandezza a è la radice di tutte le sue potenze; cioè la radice quadra della sua seconda potenza, ovvero del suo quadrato aa; la terza radice della sua terza potenza, o sia del suo cubo aaa; la quarta radice della sua quarta potenza $aaaa$, ec.

90. Ma per abbreviare l'espressione di queste potenze, scrivesi la lettera una sol volta, con un carattere a destra alquanto ad essa superiore, ch'accenni quante volte ella si dovrebbe scrivere; così in vece di aa, aaa, $aaaa$, $aaaaa$, ec. scrivesi a^2, a^3, a^4, a^5, ec. cioè a innalzata al quadrato, al cubo, o sia alla terza potenza, alla quarta, alla quinta, ec. tali caratteri diconsi *esponenti*, perch' esprimono a che grado è innalzata la grandezza.

91. Guardisi bene di non confondere gli *esponenti* co' caratteri, che talvolta trovansi a sinistra d'una grandezza algebraica. Imperocchè questi caratteri a sinistra si dicono *coefficienti*, ed esprimono un'addizione reiterata della grandezza, che lor è a destra; là dove gli *esponenti* esprimono la moltiplicazione reiterata della grandezza in se stessa: ed eccone la differenza. Se a, per esempio, vale 3, l'espressione $4a$ dinoterà, che la grandezza a esser dee presa 4 volte, il che fa 12; e all'opposto a^4 dinoterà, che la grandezza a dee prima esser moltiplicata per se stessa, il che fa aa, o a^2, e in numero, 9; che poi a^2 dee esser moltiplicata per a, il che fa aaa, od a^3, e in numero, 27; e finalmente, che a^3 esser dee moltiplicata per a, il che fa $aaaa$, od a^4, e in numero, 81, a differenza di 12, o sia di $4a$.

Delle Potenze delle grandezze complesse.

92. Le grandezze complesse pigliano la loro denominazione dalla maggiore, o minor quantità de' termini: esse si dicono *binomj*, quando hanno due termini; *trinomj*, quando ne hanno tre; *quadrinomj*, quando hanno quattro termini, ec. e comunemente *moltinomj*. $a + b$ è un binomio, $c + d + e$ è un trinomio, ec.

93. Siccome possono innalzarsi alla seconda, alla terza, alla quarta potenza, ec. le grandezze incomplesse, così alle medesime potenze si posson innalzare anche le grandezze complesse; e queste mol-

 tipli-

tiplicate in se stesse danno dei prodotti, che han sempre più termini di loro, e de' quali è ben fatto conoscer la formazione.

Pigliamo però un binomio, e innalziamolo a mano a mano a diverse potenze; poi, da ciò, che accaderà in queste differenti moltiplicazioni, sarà facile giudicare cosa debba accadere ai termini de' trinomj, quadrinomj, ec.

94. Sia dunque il binomio $a + b$: il moltiplico in se stesso, ed ho 'l quadrato $aa + 2ab + bb$; moltiplico questo quadrato per $a + b$, ed ho il cubo $a^3 + 3a^2b + 3abb + b^3$; moltiplico questo cubo per $a + b$, ed ho la quarta potenza $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$; e continuando nella stessa maniera, trovo l' altre potenze di $a + b$, come si possono vedere nella seguente Tavola, la quale perciò chiamasi Tavola delle potenze.

Tavola delle Potenze d' un Binomio.

1ª. *Potenza*	a	b				
2ª.	a^2	$2ab$	bb			
3ª.	a^3	$3a^2b$	$3abb$	b^3		
4ª.	a^4	$4a^3b$	$6a^2bb$	$4ab^3$	b^4	
5ª.	a^5	$5a^4b$	$10a^3bb$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	b^5

Questa Tavola contiene due sorte di file: l' une, che vanno da sinistra a dritta, e che contengono le potenze di $a + b$; e l'altre, che vanno dall' alto al basso; e nelle cellette di tutte queste file si contengono differenti prodotti, ciascuno de' quali ha 'l suo *coefficiente*, o un numero a sinistra; perchè quelli ancora, che non ne hanno alcuno, son tenuti avere l' unità per coefficiente, tanto essendo b^3, o b^4, come $1b^3$, o $1b^4$.

Se consideriamo soltanto i prodotti letterali, rinveniremo, che le cellette di ciascuna fila da sinistra a dritta contengono le potenze del primo termine a, le quali vanno diminuendo fino all' ultima celletta, in cui 'l detto termine non si contiene; dove all'incontro le potenze di b vanno in queste stesse cellette crescendo dalla seconda, in cui b è alla prima potenza, fino all' ultima, in cui b trovasi innalzato all' istessa potenza, a cui a è innalzato nella prima.

Per

Per sapere come si formino i coefficienti, basta osservare 1°. Che nella prima fila a sinistra discendente, le potenze di a non hanno per coefficiente, che l'unità. 2°. Che nella seconda fila altresì discendente, i coefficienti sono i numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, ec. 3°. Che nella terza fila discendente, i coefficienti de' prodotti letterali sono le somme successive de' coefficienti della fila discendente, ch'è a sinistra, ovvero della fila anterior a questa. Così essendo i coefficienti della fila anteriore 1, 2, 3, 4, e 5, trovasi, che 'l coefficiente della prima celletta della terza fila è 1; che quello della seconda è 3, cioè la somma de' coefficienti 1, 2 della fila precedente; che quello della terza è 6, vale a dire la somma de' coefficienti 1, 2, 3 della fila precedente, e così successivamente. 4°. Si troverà altresì, che nella quarta fila discendente, i coefficienti sono le somme successive de' coefficienti della terza fila, e così degli altri: Tal che, per avere il coefficiente di qualsivoglia celletta d'una di queste file, per esempio il coefficiente 6 della terza celletta della terza fila discendente, pigliasi 'l coefficiente 3 della celletta, che gli è superiore, e sommandolo al coefficiente 3 della celletta, che le è a sinistra, si ha il coefficiente 6 cercato; imperocchè essendo il coefficiente 3 della celletta superiore la somma de' coefficienti 1 e 2 della fila precedente, se a questa giugnesi 'l coefficiente 3 della fila a sinistra, il 6 sarà la somma de' coefficienti 1, 2, 3 della fila anteriore; e per conseguenza esso sarà il coefficiente ricercato.

Mediante ciò, puossi continuare la tavola in infinito, senza che sia necessità di fare tutte quelle moltiplicazioni, che far si dovrebbero per avere le potenze non contenute da questa tavola; così per avere la sesta potenza di $a + b$, faccio una sesta fila da sinistra a dritta, e nelle sei prime cellette pongo a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a; indi cominciando dalla seconda, e andando sin alla settima, scrivo b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6; così io avrò tutt' i prodotti letterali a^6, a^5b, a^4bb, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6, e non avanzano che i soli coefficienti. Perciò nella seconda celletta scrivo 'l coefficiente 6, poichè essa si troverà nella seconda fila discendente, che comprende i numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, ec. Scrivo nella terza la somma 15 del coefficiente 10 della celletta della quinta potenza che sarà superiore ad essa terza, e del coefficiente 5 della celletta della quinta fila, la qual'è a sinistra di quella, che ha il coefficiente 10; e continuando sempre con l'istesso metodo, avrò $a^6 + 6a^5b + 15a^4bb$

+

$+ 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, cioè la sesta potenza di $a + b$; e così dell'altre. (*a*)

95. Se'l secondo termine b avesse il segno $-$, in vece del segno $+$, le potenze del binomio $a - b$ sarebbero le stesse, che quelle del binomio $a + b$, eccettuato che i loro termini avrebbono alternativamente i segni $+$, e $-$. E però il quadrato di $a - b$ sarebbe $aa - 2ab + bb$, il suo cubo sarebbe $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$, e così dell'altre sue potenze.

96. La tavola adunque delle potenze sopra esposta ci fa vedere 1°. *Che'l quadrato del binomio* a + b *contiene il quadrato* aa *del suo primo termine* a, *due prodotti del primo termine* a *pel secondo* b, *ovvero il doppio del primo termine* a *moltiplicato pel secondo* b, *e'l quadrato* bb *del secondo*. 2°. *Che'l cubo di* a + b *contiene il cubo* a^3 *del primo termine* a, *tre quadrati del primo termine pel secondo*, *tre volte il primo moltiplicato pel quadrato del secondo*, *e'l cubo del secondo*. Sicchè con tal esame si potrà facilmente venire in cognizione de' prodotti contenuti nell'altre potenze.

97. Ora, per sapere ciò, ch'accaderebbe a qualunque moltinomio,

---

(*a*) Nota. *Questa ricerca de' coefficienti suppone, che la tavola delle potenze d'un binomio si abbia sempre sotto gli occhi; però sarà buono, che per noi si dia una formula generale, che possa servire ad ogni caso. Sia dunque la potenza, a cui il binomio* a + b *si voglia innalzare* = n; *Le grandezze letterali* (*pel n°. presente*) *saranno* a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$, ec. *e così di seguito, fino a tanto che l'esponente* n *sia ridotto a zero. Per questa operazione si avrà ottenuta la serie delle grandezze letterali; Per trovare quella de' coefficienti si faccia*: $1, \frac{m}{1}, \frac{m.m-1}{1.\ 2}, \frac{m.m.-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3}$, ec. *e così di seguito, fin che l'ultima frazione sia = all'unità. Avvertendo, ch'ognuna di queste frazioni si debba appoggiare ordinatamente alle grandezze letterali già preparate. Per questa formola il cubo di* a + b *sarà*

$$a^3 + \frac{3}{1} a^2b + \frac{3.2}{1.2} ab^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3} a^0b^3$$

$$\text{cioè } a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ciò che si avea a dichiarare.

mio, prendasi un trinomio $a + b + c$, e si concepisca, che i suoi due primi termini $a + b$ facciano un sol termine; il che potrebbe essere, se dessimo agli stessi un valore numerico, e se determinassimo la somma dei detti due termini. Così questo trinomio non è ch' un binomio, il quale ha $a + b$ per primo termine, e c per secondo. Dunque 'l quadrato di questo binomio contiene il quadrato del suo primo termine $a + b$, il doppio di esso moltiplicato pel secondo, e 'l quadrato del secondo. Ma perchè il primo termine $a + b$ è un binomio, il suo quadrato dee contenere il quadrato di a, il doppio di a moltiplicato per b, e 'l quadrato di b. Dunque 'l quadrato del trinomio $a + b + c$ contiene il quadrato del primo termine a, il doppio del primo per lo secondo, il quadrato del secondo, il doppio de' due primi pel terzo, e 'l quadrato del terzo.

Similmente, se pigliamo il quadrimonio $a + b + c + d$ per un binomio, il cui primo termine sia $a + b + c$, e 'l secondo d; il quadrato di questo binomio contiene il quadrato del primo termine $a + b + c$, il doppio del primo moltiplicato pel secondo, e 'l quadrato del secondo: ma perchè il primo termine $a + b + c$ è un trinomio, il suo quadrato contiene il quadrato di a, il doppio di a moltiplicato per b, il quadrato di b, il doppio di $a + b$ moltiplicato per c, e 'l quadrato di c. Dunque 'l quadrato del quadrinomio $a + b + c + d$ contiene il quadrato del primo termine, il doppio del primo moltiplicato pel secondo, il quadrato del secondo, il doppio de' due primi moltiplicato pel terzo, il quadrato del terzo, il doppio de' tre primi moltiplicato pel quarto, e 'l quadrato del quarto; e applicando il medesimo discorso ad un moltinomio di 5, 6, 7 termini, ec. s'avrà la regola generale, o 'l Teorema seguente.

98. TEOREMA. *Il quadrato di qualunque moltinomio contiene 'l quadrato del suo primo termine, il doppio del primo moltiplicato pel secondo, il quadrato del secondo, il doppio de' due primi moltiplicato pel terzo, il quadrato del terzo, il doppio de' tre primi moltiplicato pel quarto, il quadrato del quarto*; e così successivamente.

99. A fine d'avere i prodotti contenuti nei cubi de' trinomj, quadrinomj, ec. prendasi 'l trinomio $a + b + c$, e si tenga per un binomio, che abbia $a + b$ per primo termine, e c per secondo. Ora, il cubo di detto binomio conterrà 'l cubo del primo termine $a + b$, tre quadrati di questo primo termine moltiplicati pel secondo c, tre quadrati del secondo moltiplicati per lo primo, e 'l cubo

cubo del secondo (*N.* 94.) . Ma perchè il primo termine $a + b$ è un binomio, il suo cubo dee contenere il cubo di a, tre quadrati di a moltiplicati per b, tre quadrati di b moltiplicati per a, e'l cubo di b. Onde il cubo del trinomio $a + b + c$ contiene'l cubo del primo termine, tre quadrati del primo moltiplicati pel secondo, tre quadrati del secondo moltiplicati per lo primo, il cubo del secondo, tre quadrati della somma de' due primi moltiplicati pel terzo, tre quadrati del terzo moltiplicati per la somma de' due primi, e'l cubo del terzo; e facendo le stesse osservazioni sopra un quadrinomio, un quintinomio, ec. s'avrà la regola generale, o'l Teorema seguente.

100. TEOREMA. *Il cubo di qualunque moltinomio contiene'l cubo del primo termine, tre quadrati del primo moltiplicati pel secondo, tre quadrati del secondo moltiplicati per lo primo, il cubo del secondo, tre quadrati della somma de' due primi moltiplicati pel terzo, tre quadrati del terzo moltiplicati per la somma de' due primi, il cubo del terzo, tre quadrati della somma de' tre primi moltiplicati pel quarto, tre quadrati del quarto moltiplicati per la somma de' tre primi, il cubo del quarto*; e così successivamente.

101. Nell'istessa maniera si possono rinvenire i termini contenuti nelle quarte, quinte, seste potenze, ec. de' moltinomj, che hanno più di due termini.

Dell' Estrazione delle Radici delle grandezze letterali.

102. L'*estrarre* la *Radice* da una data grandezza non è che ritrovare un numero, il quale, moltiplicato una, o più volte in se stesso, produca detta grandezza. La radice d'un quadro, o sia la radice quadrata è il numero, che moltiplicato una volta in se stesso ha prodotto il quadro: la radice d'un cubo, ovvero la radice cuba, o la terza radice è il numero, che moltiplicato due volte successivamente in se stesso ha prodotto il cubo: la quarta radice è il numero, che moltiplicato tre volte successivamente in se stesso ha prodotto la quarta potenza, ec.

103. Quando la grandezza, da cui si vuole estrarre qualunque radice, è incomplessa, facilmente scorgesi, se la radice, che si cerca, possa estrarsi, o no. Per esempio, egli è manifesto, che la radice quadrata di aa è a, che quella di $aabb$ è ab; che la radice cuba di aaa, od a^3 è a, che quella di a^3c^3 è ac, e così dell'altre.

Dove

Dove all' incontro si vede l' impossibilità d' estrarre la radice quadrata, o cuba di ac, non meno che quella di a, di bd, ec.

104. Quando da una grandezza non si possa estrarre la radice, scrivesi a sinistra della stessa il segno $\surd$ detto radicale, e di sopra scrivesi'l numero esprimente il grado di questa radice: $\sqrt[2]{a}$, ovvero semplicemente $\sqrt{a}$ è la radice quadra di a; $\sqrt[3]{b}$ è la radice cuba, o terza di b; $\sqrt[4]{ac}$ è la radice quarta di ac, ec. ora, tali radici diconsi *sorde*, *irrazionali*, o *incommensurabili*, non potendosi esprimere il rapporto, ch' esse hanno con qualsivoglia altra grandezza.

105. Quando la grandezza semplice, da cui si vuole estrarre qualunque radice, è una frazione, s' estrae la radice dal numeratore e dal denominatore, e si fa una nuova frazione, che sarà la radice ricercata. Così la radice quadra di $\frac{aa}{bb}$ è $\frac{a}{b}$; la radice cuba di $\frac{c^3}{d^3}$ è $\frac{c}{d}$, quella di $\frac{a^3c^3}{b^3}$ è $\frac{ac}{b}$; la radice quarta di $\frac{a^4b^4}{c^4b^4}$ è $\frac{ab}{cd}$.

La radice quadra di $\frac{ac}{db}$ è $\frac{\sqrt[2]{ac}}{\sqrt[2]{ab}}$, ovvero semplicemente $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ab}}$, od anche $\sqrt{\frac{ac}{ab}}$ allungando la gamba del segno radicale, in modo che comprenda il numerator, e 'l denominatore. La radice cuba di $\frac{abc}{d}$ è $\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{3df}}$, o $\sqrt[3]{\frac{abc}{df}}$, ec.

106. Le radici delle grandezze complesse s' estraggono mediante la tavola data quì sopra; ed eccone alcuni esempj.

PRIMO ESEMPIO. Per estrarre la radice quadrata da $cc + 2cd + dd$, tiro due linee, l' una sotto, e l' altra a destra di questa grandezza,

$$\frac{cc + 2cd + dd}{c + 2c \quad d} (\; c + d$$

per iscriverle accanto i termini della radice, che cerco; indi consulto la tavola, o'l Teorema del numero 98, e veggo, che'l quadrato proposto contiene il quadrato del suo primo termine, il doppio del primo moltiplicato pel secondo, il quadrato del secondo, ec. onde, se sottraendo dalla grandezza proposta questi differenti prodotti, null' avanza, sarà se-

gno, che la detta grandezza è un quadrato, e n' avrò la radice, che da me ſi cerca. Dico adunque: il primo quadrato da ſiniſtra a dritta è cc, la cui radice è c; ſcrivo c nel luogo deſtinato per la radice, e ſotto del quadrato cc. Moltiplico la radice c in ſe ſteſſa, cioè per la lettera c da me ſcritta ſotto al quadrato cc, e ſottrattone il prodotto da cc, nulla reſta: così 'l quadrato propoſto non contiene più il quadrato tolto; e però io metto un punto ſopra 'l quadrato cc per ſignificare la ſottrazione, che di eſſo ne ho fatta.

Raddoppio la radice trovata c, il che fa $2c$; e perchè il doppio $2c$ moltiplicato per la ſeconda radice contienſi nel reſiduo del quadrato propoſto, ſcrivo $2c$ ſotto 'l termine $2cd$, e divido $2cd$ per $2c$, il che dà d, ch' eſſer dee la ſeconda radice; imperocchè, eſſendo 'l termine $2cd$ il prodotto di $2c$ moltiplicato per la ſeconda radice, è fuor d'ogni dubbio, ſecondo le regole della moltiplicazione, e diviſione, che dividendo $2cd$ pel numero da moltiplicarſi $2c$, il quoziente, e in conſeguenza d eſſer dee il moltiplicatore. Moltiplico la radice, o 'l quoziente d pel diviſore $2c$, e ſottrattone il prodotto da $2cd$, null' avanza; e metto un punto ſopra 'l termine $2cd$.

Ora, il quadrato propoſto dee altresì contenere il quadrato della ſeconda radice d; così io ſcrivo d ſotto 'l termine dd della grandezza propoſta, e moltiplicando d in ſe ſteſſo, ovvero per la ſeconda radice d, ho 'l prodotto dd; levo queſto prodotto da dd, e null' avanza: dunque la radice ricercata è $c + d$.

II. ESEMPIO.

Per eſtrarre la radice quadrata da $bb + 2bc + cc + 2bd + 2cd + dd$, dico: il primo termine a ſiniſtra è bb, la cui radice è b, ch' io ſcrivo nel poſto deſtinato per la radice, e ſotto la grandezza bb; moltiplico b per b, e ſottrattone il prodotto da bb, niente reſta; e metto un punto ſopra 'l termine bb.

$$\frac{\dot{bb} + \dot{2bc} + \dot{cc} + \dot{2bd} + \dot{2cd} + \dot{dd}}{b + 2b + c + 2b + 2c + d} \left(b + c + d \right.$$

Raddoppio la radice trovata b, il che fa $2b$, ch' io ſcrivo ſotto 'l termine $2bc$, e dividendo queſto termine per $2b$, ſcrivo la ſeconda radice, ch' è c; moltiplico $2b$ per c, e ſottraendone il prodotto da $2bc$, niente reſta. Scrivo c ſotto 'l termine cc, e moltiplicando c per la radice c, ho 'l prodotto cc; levo queſto prodotto da cc, e null' avanza.

Ra-

Raddoppio le due prime radici, il che fa $2b + 2c$, ch' io scrivo sotto i termini $2bd + 2cd$, e dividendo questi termini per $2b + 2c$, il quoziente d è la terza radice. Moltiplico questa radice per $2b + 2c$, ed ho $2bd + 2cd$; ne tolgo il prodotto da $2bd + 2cd$, e niente resta: scrivo d sotto l' ultimo termine dd, e moltiplicando d per la terza radice d, ho 'l prodotto dd; tolgo questo prodotto da dd, e null' avanza. Così la radice ricercata è $b + c + d$.

III. ESEMPIO. Per estrarre la radice quadrata da $cc - 2cd + dd$, trovo che la prima radice è c; il cui quadrato essendo tolto dal termine cc, null'avanza. Raddoppio la prima radice, il che fa $+ 2c$; e dividendo $- 2cd$ per $+ 2c$, il quoziente è $- d$. Moltiplico $- d$ per $+ 2c$, il che mi dà $- 2cd$; e sottratto questo prodotto da $- 2cd$, niente resta. Scrivo $- d$ sotto 'l termine dd; e moltiplicando $- d$ per la radice $- d$, il prodotto è $+ dd$, il quale sottratto da $+ dd$, nulla resta.

$$\frac{\dot{c}c - 2cd + \dot{d}d \;(\; c - d}{c + 2c \quad - d}$$

IV. ESEMPIO. Per estrarre la radice cuba da $c^3 + 3ccd + 3cdd + d^3$; dico, a norma di quello, ch' abbiamo insegnato nel Teorema del numero 100: la radice cuba del primo termine c^3 è c; e facendo 'l cubo c^3 di questa radice, il levo dal termine c^3, e null'avanza; faccio 'l quadrato cc di questa prima radice, il moltiplico per 3, il che fa $3cc$, e perciocchè la grandezza proposta dee contenere $3cc$ moltiplicato per la seconda radice; divido $3ccd$ per $3cc$, e 'l quoziente d è la seconda radice ricercata. Moltiplico la seconda radice d per $3cc$, e sottrattone il prodotto da $3ccd$, null' avanza. Faccio 'l quadrato dd della seconda radice d, e 'l moltiplico per 3 e per c, giacchè la grandezza proposta dee contenere 3 volte questo quadro moltiplicato per c; e 'l prodotto è $3cdd$: tolgo questo prodotto dal termine $3cdd$, e nulla resta; finalmente, facendo 'l cubo d^3 della seconda radice, e sottraendolo dal termine d^3, niente rimane: dunque la radice ricercata è $c + d$.

$$\frac{\dot{c}^3 + 3\dot{c}cd + 3\dot{c}dd + \dot{d}^3 \;(\; c + d}{c^3 + 3cc \quad + 3dd \quad + d^3}$$

V. ESEMPIO. Per estrarre la quarta radice da $c^4 + 4c^3d + 6c^2dd + 4cd^3 + d^4$, piglio la quarta fila da sinistra a dritta della tavola delle potenze, che contiene la quarta potenza del binomio $a + b$, e veggo, che questa quarta potenza contiene la quar-

ta potenza del primo termine a, 4 volte il cubo di a moltiplicato pel ſecondo termine d, ſei volte il quadro del primo termine a moltiplicato pel quadro del ſecondo, quattro volte il cubo del ſecondo moltiplicato per lo primo, e la quarta potenza del ſecondo. Dico adunque : il primo termine c^4 è la quarta potenza di c, e però ſcrivo c nel luogo deſtinato per le radici; innalzo c alla quarta potenza c^4, e ſottratto c^4 da c^4, nulla reſta.

$$\frac{c^4 + 4c^3d + 6c^2dd + 4cd^3 + d^4}{c^4 + 4c^3 \quad + 6c^2dd + 4cd^3 + d^3} \; (c + d$$

Faccio'l cubo c^3 della prima radice c, e moltiplicandolo per 4, ho $4c^3$; divido'l termine $4c^3d$ per $4c^3$, e'l quoziente d è la ſeconda radice, perocchè la grandezza propoſta dee contenere $4c^3$ moltiplicato per la ſeconda radice; moltiplico $4c^3$ per la ſeconda radice d, il che mi dà $4c^3d$, ch'io levo da $4c^3d$; e nulla reſta. Faccio'l quadrato dd della ſeconda radice d, il moltiplico per 6, e poi pel quadro c^2 della prima, il che fa $6c^2dd$; e ſottratto queſto prodotto da $6c^2dd$, null'avanza. Faccio'l cubo d^3 della ſeconda radice, il moltiplico per 4 e per c, e ſottrattone il prodotto da $4cd^3$, niente reſta; innalzo finalmente la ſeconda radice alla ſua quarta potenza d^4, e ſottratto d^4 da d^4, null'avanza: dunque la radice ricercata è $c + d$.

VI. ESEMPIO. Per eſtrarre la radice quadra dalla grandezza $\frac{aa + 2ab + bb}{cc}$, ch'è una frazione, eſtraggo dal numeratore la radice $a + b$, e dal denominatore la radice c, e ſcrivo $\frac{a + b}{c}$; e così dell'altre. Che ſe doveſſi render di ciò ragione, direi: ch'un numero rotto moltiplicato in ſe ſteſſo produce il ſuo quadrato; ora, per moltiplicare una frazione in ſe ſteſſa, ſi moltiplica tanto'l numeratore come il denominator, l'uno e l'altro per ſe, il che dà il quadrato del numeratore, e quello del denominatore; onde per eſtrarre la radice da una frazione, biſogna eſtrarre la radice dal numeratore, e dal denominatore.

Conviene dir lo ſteſſo della radice cuba d'una frazione; imperocchè una frazione, che ſi moltiplichi due volte ſucceſſivamente in ſe ſteſſa, produce il ſuo cubo: ora, per fare il cubo d'una frazione, ſi moltiplica tanto'l numeratore come il denominator della ſteſſa, l'uno e l'altro due volte ſucceſſivamente per ſe; onde per eſtrarre la radice cuba, biſogna eſtrar la radice cuba dal numeratore, e

dal

dal denominatore; e lo stesso si dica delle potenze più innalzate delle frazioni.

VII. ESEMPIO. Per estrar la radice cubà da $a^3 + b^3$, scrivo $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$, non essendo questa una radice, che si possa estrarre; ed avverto, che'l segno radicale s'estenda sopra tutt'i termini della grandezza proposta: similmente, per estrarre la radice quadrata da $\frac{aa + ab + bc}{cc - dd}$, scrivo $\frac{\sqrt{aa + ab + bc}}{\sqrt{cc - dd}}$, ovvero semplicemente $\sqrt{\frac{aa + ab + bc}{cc - dd}}$.

107. Le cose dette fanno a proposito per l'estrazione delle radici delle grandezze numeriche; ma perchè non si suole estrarre, che la radice quadrata, e la cuba, così io non insegnerò ad estrarre che queste due; dalla cui maniera si potrà facilmente arguire, cosa ricerchisi per estrarre le radici da grandezze più innalzate.

Dell'Estrazione della Radice quadrata delle grandezze numeriche.

108. Per estrarre la radice quadrata dalle grandezze numeriche, è necessario sapere i quadrati de' dieci primi numeri 1, 2, 3, 4, ec. i quali sono i seguenti.

Radici	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Se le quantità, da cui si vuole estrarre la radice quadra, sono più grandi del quadrato maggiore contenuto nell' accennata Tavola, se n' estrae la radice nella stessa maniera, che s'estrae la radice quadrata dalle grandezze letterali; ma la difficoltà maggiore consiste in sapere, qual sito occupino i prodotti, che si debbono dalla quantità proposta sottrarre. Per venirne dunque a capo, fa prima di mestiere conoscer come si formi un quadrato numerico; indi

indi poi farà agevole dedurne le regole per l' estrazione della sua radice.

Si debba per tanto innalzare il numero 36 al suo quadrato; il moltiplico in se stesso, scrivendo 36 sotto 36, e dico: 6 volte 6 fanno 36, scrivo 'l 6 sotto le unità, e in vece di ritener il 3, ch' avanza, lo scrivo sotto le decine; 3 volte 6 fanno 18, scrivo l' 8 sotto le decine, e in vece di ritener l' 1, ch' avanza, lo scrivo un posto più innanzi. Moltiplico 36 pel secondo carattere del moltiplicatore, dicendo: 3 volte 6 fanno 18, di cui l' 8 io scrivo sotto alle decine, e l' unità nel posto delle centinaja; e per fine, 3 volte 3 fanno 9, e scrivo 9 nel posto delle centinaja: così, quantunque questa maniera di moltiplicare sembri differente dal solito metodo, tuttavolta il prodotto totale non viene alterato; giugno tutt' i prodotti da me trovati, e la somma è 1296. Distinguo con una lineetta i caratteri di questo numero a due a due in varie parti, o membri, e veggo, pigliando le linee da sinistra a dritta, che 'l quadrato 9 del primo carattere 3 della radice 36 è a sinistra della prima; che i due prodotti 18 e 18 del primo carattere 3 moltiplicato pel secondo carattere 6 sono parte a sinistra, e parte a destra; e finalmente, che 'l quadrato 36 del secondo carattere 6 è in mezzo alle due linee.

```
      36
      36
   |36|
  1|8 |
  1|8 |
  9|  |
 12|96|
```

Così ancora, se si dovesse fare il quadrato di 323, ch'è 104329, troverebbesi, distinguendo, come ho insegnato, i caratteri di questo quadrato a due a due in varj membri, come quì si vede, 10|43|29; che 'l quadrato del primo carattere 3 della sua radice sarebbe contenuto ne' caratteri 10, che sono a sinistra della prima linea; che 'l doppio di questo carattere moltiplicato pel secondo carattere 2 sarebbe parte a sinistra, e parte a destra di detta linea; che 'l quadrato 4 del secondo carattere 2 sarebbe a sinistra della seconda linea; che 'l doppio de' due primi caratteri moltiplicato pel terzo 3 sarebbe parte a sinistra, e parte a destra della seconda linea; e finalmente, che 'l quadrato 9 del terzo carattere sarebbe a sinistra della terza linea; e dicasi l' istesso d' un quadrato, ch' avesse più membri: posto ciò, porteremo alcuni Esempj attenenti all' estrazione della radice quadrata; ma prima sarà bene, che facciamo la seguente osservazione.

109.

109. AVVERTIMENTO. I numeri quadrati chiamansi con tal nome, perchè possono fra differenza d'ogni altro numero talmente disporsi, che rappresentino una figura quadrata, cioè una figura, i cui lati da ogni parte contengano un'egual numero d'unità. Il numero 4, ordinato come quì si vede, contiene due unità per ogni lato; il 9 ne contiene 3; il 16 4, ec.

```
        I I       I I I     I I I I
  I               I I I     I I I I
        I I       I I I     I I I I
                            I I I I
```

PRIMO ESEMPIO. *Si vogliono disporre 3844 uomini, in modo che formino un Battaglione quadrato: si ricerca, quanti uomini vi saranno di fronte, e quanti di fila; cioè quanti uomini vi saranno per ogni lato di questo quadro?*

```
38'44(62
6
-----
244
122
-----
000
```

Scrivo'l numero 3844, e vi tiro due linee, l'una sotto, e l'altra a destra per collocarvi la radice ricercata. Distinguo al solito i caratteri di questo numero a due a due in varj membri, e dico: il quadrato maggiore contenuto ne' caratteri 38, che sono a sinistra della prima linea, è 36, la cui radice è *6*; scrivo *6* nel luogo destinato per la radice, e sotto a 38. Moltiplico la radice *6* in se stessa, e mi dà *36*; dal 38 levo'l *36*, e tirata una linea sotto del *6* da me collocato sotto al numero proposto, scrivo il residuo 2.

Abbasso gli altri due caratteri 4 e 4 del numero proposto, che sono fra la prima e la seconda linea, e raddoppiando la prima radice *6*, il che fa 12, scrivo talmente 12 sotto 244, che'l suo ultimo carattere 2 sia a destra della prima linea, e l'altro a sinistra; e perchè i caratteri 24 del numero proposto debbono contenere il doppio 12 moltiplicato per la seconda radice, divido 24 per 12, e'l quoziente 2 è la seconda radice, ch'io scrivo accanto al *6*; moltiplico 12 per la seconda radice 2, e mi dà 24; levo 24 da 24, e nulla resta.

Scrivo la radice 2 sotto l'ultimo carattere 4, e moltiplicando 2 per 2, il prodotto è 4; levo 4 da 4, e null'avanza: dunque la radice è 62, e per consegnenza vi saranno 62 uomini di fronte, e 62 di fila.

110. Se dividendo il residuo della grandezza proposta pel doppio della

della prima, delle due prime, o delle tre prime radici, ec. trovasi un quoziente, il cui quadrato non possa esser contenuto ne' caratteri della grandezza proposta, da' quali egli sottrar si dee, scemansi l'unità del detto quoziente, o radice, finattanto che ne possa esser tolto il di lui quadrato; ciò che noi vedremo nell'Esempio, che segue.

II. ESEMPIO. Sia 'l numero proposto 4831204; distinguo al solito i caratteri di questo numero a due a due in varj membri, e vi scopro quattro radici. Dico adunque: il quadrato maggiore contenuto nel primo carattere a sinistra è 4, la cui radice è 2, e sottraendo il quadrato della radice dal carattere 4, nulla avanza. Abbasso i due caratteri 83, e sotto vi scrivo la prima radice raddoppiata 4; cioè scrivo 'l 4 sotto l' 8, ch'è immediatamente a destra della prima linea; divido 8 per 4, ed ho 2; ma perciocchè, dopo sottratto da 8 il prodotto della radice 2 per 4, non avanzerebbe che 3, il quale non può contenere il quadrato 4 di questo quoziente 2, pongo 1 in vece di 2: così una volta 4 fa 4; da 8 levo 4, ed avanza 4; scrivo la radice 1 sotto del 3, e da 3 togliendo il prodotto di 1 per 1, avanza 2.

```
4'83'12'04(2198
2
 83
 41
 42.12
  4 29
  3 51.04
   43 88
   0000
```

Abbasso i due caratteri 12, che sono fra la seconda e la terza linea, e raddoppiando le due prime radici 21, il che fa 42, scrivo 42 sotto 4212, in maniera che 'l suo ultimo termine 2 sia immediatamente a destra della seconda linea; e a misura ch' abbasso i termini del quadro dato, ne segno il posto con un punto: ora, questo doppio 42 moltiplicato per la terza radice contiensi nei termini 421 del quadro dato; onde dividendo 421 per 42 disposto come sta scritto, trovo 9 per terza radice; perocchè il numero 4 9 volte si contiene in 42, ed avanza molto più del bisogno, per fare che anche il 2 sia contenuto 9 volte, e che 'l quadrato di 9 sia contenuto nel residuo sommato all' ultimo carattere 2 di 4212; scrivo dunque 9 sotto a quest' ultimo carattere, e dico: 9 volte 9 fanno 81; da 2 non posso sottrar 81, piglio perciò in prestito 8 decine ed ho 82 da cui sottratto 81, avanza 1; 2 volte 9 fanno 18, più 8, che ho pigliato in prestito, uguale 26: ora, da 1 non posso sottrar

ſottrar 26, e però piglio in preſtito 3, il che fa 31; da 31 tolgo 26, e avanza 5; 9 volte 4 fanno 36, più 3 uguale 39, e ſottraendo 39 da 42, avanza 3.

Abbaſſo i due ultimi caratteri 04 del quadrato propoſto, e ſcrivo le tre prime radici raddoppiate, le quali ſono uguali a 438, in maniera che 'l ſuo ultimo carattere ſia immediatamente a deſtra della terza linea; e dividendo 3510 per 438 diſpoſto come ſta ſcritto, trovo 8 per terza radice: ſcrivo adunque 8 nel poſto deſtinato per le radici, e ſotto all'ultimo carattere 4 del quadro già detto; indi moltiplico 4388 per la radice 8, e ſottrato il prodotto dal numero 35104, come nell'operazione precedente, nulla reſta; e la radice ricercata è 2198.

III. ESEMPIO. Per eſtrarre la radice quadra dalla frazione $\frac{121}{144}$, eſtraggo al ſolito la radice 11 dal numeratore 121, e la radice 12 dal denominatore 144; ed ho $\frac{11}{12}$ uguale alla radice della data frazione, come s'è dimoſtrato nel ſeſto eſempio dell'eſtrazione delle radici delle grandezze letterali (*N.* 101.).

111. Se dopo fatte tutte l'operazioni neceſſarie per eſtrarre la radice quadra da un dato numero avanzaſſe qualche coſa, ſarebbe ſegno, che 'l dato numero non è un quadro perfetto, e che per conſeguenza non ſi potrebbe eſtrarne la radice; ſicchè ſcriverebbeſi il detto numero col ſegno radicale. Sia eſſo, p. e. 126; n'eſtraggo la ſua radice, e trovo che la medeſima è 11 con un reſiduo 5; queſto numero adunque non è quadrato, e perciò n'eſprimo la ſua radice in queſto modo $\sqrt{126}$: faremo tra poco vedere, che quantunque le ſue radici non poſſano eſprimerſi ne con un numero intero, ne con un numero rotto, ne con un numero compoſto d'un intero, e d'una frazione, potremo nulladimeno ſempre più approſſimarſi al ſuo vero valore ſenza mai ottenerlo. Ecco frattanto alcuni Teoremi, ſu'quali ſarà bene riflettere.

112. TEOREMA. *Se ad un numero intero ſi giugne, o ſi toglie un numero intero, ovvero ſe moltiplicaſi un numero intero per un' altro numero intero, la ſomma, o'l reſiduo, o'l prodotto ſarà un numero intero; ma ſe divideſi un numero intero per un' altro numero intero, il quoziente non ſarà ſempre un numero intero.*

Un numero intero è una ſomma eſatta d'unità ſenza frazione; onde, ſe giungonſi due ſomme ſimili, la ſomma totale non può eſſere che un numero d'unità ſenza frazione; e ſe da una ſomma eſatta d'unità toglieſi un' altra ſomma d'unità eſatta, ma minore, il reſiduo dee eſſer ancora una ſomma d'unità ſenza frazione. Similmente, moltiplicando un numero intero per un' altro

numero intero, pigliasi 'l primo tante volte, quante sono l'unità, che si contengono nel secondo: ora, questo secondo numero contiene l'unità esattamente; e però egli è manifesto, che pigliasi la somma esatta d'unità del primo un certo numero di volte senza frazione, e che in conseguenza il prodotto dee esser senza frazione. Ma quando si divide un numero intero per un'altro numero intero, può darsi, che 'l divisore non sia contenuto esattamente un dato numero di volte nel dividendo; ed allora il residuo è una frazione.

113. TEOREMA. *Se ad un numero intero si giugne, o si toglie una frazione, la somma, o 'l residuo non sarà un numero intero; ma se si moltiplica, o si divide un numero intero per una frazione, il prodotto, o 'l quoziente può essere un numero intero.*

Se la frazione è minore dell'unità, è manifesto, che giugnendo detta frazione ad un numero intero, la somma sarà composta d'una somma esatta d'unità, e d'una frazione; e sottraendola da un numero intero, il residuo sarà una somma d'unità, meno una parte di unità; e in conseguenza il residuo, o la somma non sarà mai un numero intero, che contenga esattamente l'unità: ma se si moltiplica, o si divide un'intero per una frazione, potrà darsi, che 'l prodotto, o 'l quoziente sia un numero intero. Per esempio, se moltiplicasi il numero 3 per $\frac{2}{3}$, il prodotto $\frac{6}{3}$ sarà un'intero, che valerà 2; dove all'incontro, se moltiplicasi 3 per $\frac{3}{4}$, il prodotto $\frac{9}{4}$ non sarà un'intero. Similmente, se dividesi 2 per $\frac{2}{3}$, ovvero $\frac{6}{3}$ per $\frac{2}{3}$, il quoziente 3 sarà un numero intero; ma se dividesi 3 per $\frac{2}{3}$, il quoziente $4\frac{1}{2}$ non sarà un numero intero.

114. TEOREMA. *Se una frazione è ridotta a minori termini, anche il suo quadrato, il suo cubo, ec. saranno frazioni ridotte a minori termini.*

La frazione $\frac{a}{b}$ sia ridotta a minori termini; il suo quadrato è $\frac{aa}{bb}$: se non voglio, che questa frazione, o quadrato $\frac{aa}{bb}$ sia ridotto a minori termini, potrò dunque trovare un numero, il quale divida esattamente il numerator aa, e 'l denominatore bb. Supponiamo, che i due quozienti sieno xx, yy, tal che la frazione $\frac{xx}{yy}$ sia uguale alla frazione $\frac{aa}{bb}$ ridotta a minori termini; dunque la radice quadra di detta frazione sarà $\frac{x}{y}$, ed essa sarà uguale alla radice $\frac{a}{b}$ della frazione $\frac{aa}{bb}$: ora, perocchè i quadrati xx, yy sono minori dei quadrati aa, bb, anche le

le radici x, y saranno minori delle radici a, b; e in conseguenza la frazione $\frac{a}{b}$ sarà espressa da termini maggiori di quelli della sua uguale $\frac{x}{y}$; onde la frazione $\frac{a}{b}$ non è ridotta a minori termini, secondo la supposizione da noi fatta, perch' ella potrebbe esser espressa da $\frac{x}{y}$; dunque, ec.

115. Potremmo aggiugnere moltissimi Teoremi attenenti a tal materia; ma già i tre, o quattro, che seguono, sono bastevoli a darci tutt'i lumi necessarj.

116. TEOREMA. *Se due frazioni ridotte a minori termini non hanno un' istesso denominatore non possono giammai esser uguali.*

Le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sieno ridotte a minori termini, e con denominatori differenti: se voglio ch'esse sieno eguali, il numerator a sarà tanto grande rispetto al suo denominator b, come il numerator c lo è rispetto al suo denominator d; e però, se d è maggiore di b, anche il numerator c sarà maggiore di a, e la frazione $\frac{c}{d}$ sarà espressa da termini maggiori di quelli della sua uguale $\frac{a}{b}$; onde la frazione $\frac{c}{d}$ non sarà stata ridotta a minori termini, giusta l'ipotesi da noi fatta, perch' ella potrebbe esser espressa da $\frac{a}{b}$: che se d è minore di b, il numerator c sarà altresì minore del numerator a; e la frazione $\frac{a}{b}$, essendo espressa da termini maggiori di quelli della sua uguale $\frac{c}{d}$, non sarà stata ridotta a minori termini; il che ripugna parimente alla supposizione; dunque, ec.

117. TEOREMA. *Se due frazioni, le quali hanno un' istesso denominatore, sono insieme uguali ad un' intero, e che l' una d' esse sia ridotta a minori termini, lo sarà anche l' altra.*

Date le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, le quali hanno un' istesso denominatore, e la cui prima $\frac{a}{b}$ è ridotta a minori termini, la somma de' due numeratori $a + c$ è uguale o a b, o a $2b$, o a $3b$, ec. e in conseguenza ella è un' intero: se non voglio che la seconda frazio-

ne $\frac{c}{b}$ sia ridotta a minori termini, troverò un numero, cui chiameremo x, il quale, dividendo esattamente il numeratore e'l denominatore di detta frazione, la ridurrà a nimori termini: se dunque supponesi $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{b}{b}$, cioè $a + c = b$, il numero x, che divide esattamente b, dividerà altresì esattamente la quantità $a + c$; e siccome questo numero divide esattamente la parte c di detta quantità, esso dividerà ancora esattamente l' altra parte a; onde avremo un numero x, che potrà dividere esattamente i termini della frazione $\frac{a}{b}$, e in conseguenza essa non sarà stata ridotta a minori termini, il che ripugna alla supposizione; e l' istesso sarebbe, se supponessimo $a + c = 2b$, perocchè il numero x, che dividesse esattamente b, dividerebbe altresì esattamente $2b$, od $a + c$, ec.

118. TEOREMA. *Se due frazioni ridotte a minori termini hanno il medesimo denominatore, la loro somma può esser eguale ad un' intero; ma se i loro denominatori sono differenti, la loro somma è sempre una frazione maggiore, o minore dell' unità.*

Le due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sieno ridotte a minori termini, ed abbiano un'istesso denominatore; ecco che senza veruna difficoltà io potrò fare, che la somma de'numeratori a, c sia uguale o a b, o a $2b$, ec. per esempio nelle frazioni $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ ridotte a minori termini, la somma $2 + 3$ de' numeratori è uguale a 5; e in conseguenza queste due frazioni equivagliono a $\frac{5}{5}$, o sia ad un'intero: similmente, nelle frazioni $\frac{8}{7}$ e $\frac{6}{7}$ ridotte a minori termini, la somma $8 + 6$ de' numeratori è 'l doppio del denominator 7; e però le due frazioni equivagliono a $\frac{14}{7}$, ovvero a due interi; e così dell'altre.

Ora, le stesse frazioni sieno ridotte a minori termini, ma con denominatori differenti: cerco la quantità, che debbo aggiugnere al numerator a per renderlo uguale al suo denominatore; e facendo la frazione $\frac{h}{b}$, la somma $\frac{a}{b} + \frac{h}{b}$ sarà uguale a $\frac{b}{b}$, e conseguentemente ella sarà un'intero; e perciocchè la frazione $\frac{a}{b}$ è ridotta a minori termini, lo sarà anche la frazione $\frac{h}{b}$ (N. 117.). Se voglio adunque, che le due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ prese insieme equivagliano

ad

ad un' intero, le riduco al medesimo denominatore, il che dà $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{bd}$, però bisogna che $ad + cb$ sia uguale a bd; e moltiplico i termini della frazione $\frac{b}{b}$ per d, il che dà $\frac{bd}{bd}$; onde, perchè le due frazioni $\frac{a}{b} + \frac{b}{b}$ sono uguali ad un' intero, anche le due $\frac{ad}{bd} + \frac{bd}{bd}$, che sono le stesse, saranno similmente uguali ad un' intero, o ad 1: ora, per ipotesi, le due frazioni $\frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd}$ vagliono 1; dunque $\frac{ad}{bd} + \frac{bd}{bd} = \frac{ad}{bd} + \frac{ab}{bd}$, e sottraendo $\frac{ad}{bd}$ da amendue le parti, avremo $\frac{bd}{bd} = \frac{cd}{bd}$: ma le frazioni $\frac{bd}{bd}$ e $\frac{cb}{bd}$ sono uguali alle frazioni $\frac{b}{b}$ e $\frac{c}{d}$; onde le due frazioni $\frac{b}{b}$ e $\frac{c}{d}$ ridotte a minori termini, e con denominatori disuguali, sono eguali, il ch' è impossibile (*N.* 116.); e però egli è ancora impossibile, che le due $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ equivagliano all' unità, o sia ad un' intero.

Che se voglio, che le due frazioni equivagliano a due, a tre, o a quattro interi, ec. cerco la grandezza, che debbo aggiugnere al numerator a della frazione $\frac{a}{b}$, perchè sia uguale a $2b$, $3b$, ec. e supponendo b uguale a detta grandezza, ho la frazione $\frac{b}{b}$; così le due frazioni insieme $\frac{a}{b} + \frac{b}{b}$ equivagliono o a $\frac{2b}{b}$, o a $\frac{3b}{b}$, ec. cioè a tre, a quattro, o a cinque unità, ec. e continuando a discorrer, e ad operare nello stesso modo che sopra, farò vedere, che le due frazioni $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ non possono valere ne due, ne tre, ne quattro unità, ec. ne alcun numero intero; e che per consequenza la loro somma è una frazione maggiore, o minor dell' unità.

119. TEOREMA. *Se moltiplicasi una frazione in se stessa, il prodotto è una frazione, ne mai sarà un' intero.*

Se la frazione è minore dell' unità, io la riduco a minori termini; e supponendola espressa da $\frac{a}{b}$, il suo quadrato è $\frac{aa}{bb}$: ora, essen-

essendo a minor di b, ed essendosi, per fare il quadro, moltiplicato il numerator della frazione $\frac{a}{b}$ per a, e'l denominatore per b maggiore di a, il denominator bb del quadrato $\frac{aa}{bb}$ è maggiore rispetto al suo numerator aa, di quello sia il denominator b della frazione $\frac{a}{b}$ rispetto al suo numerator a; e in conseguenza $\frac{aa}{bb}$ è minore della frazione $\frac{a}{b}$: ma $\frac{a}{b}$ è minore dell'unità; dunque molto più $\frac{aa}{bb}$.

Se la frazione è maggiore dell'unità, essa conterrà uno, o più interi, più una frazione minore dell'unità; supponendo adunque, che l'intero, o gl'interi in essa contenuti sieno espressi da m, e che la frazione rimanente, ridotta a minori termini, sia $\frac{a}{b}$, ella sarà $m+\frac{a}{b}$, e'l suo quadrato sarà $mm+\frac{2ma}{b}+\frac{aa}{bb}$: ora, in questo quadrato, il primo termine mm è un' intero; il secondo $\frac{2ma}{b}$, essendo'l prodotto della frazione $\frac{a}{b}$ per l'intero $2m$, è o un' intero, od una frazione (*N.* 113.); e l'ultimo, essendo 'l quadrato della frazione $\frac{a}{b}$ minore dell'unità, è una frazione; onde, se i due primi termini sono due interi, la lor somma sarà un' intero (*N.* 112.), e aggiugnendo ad esso la frazione $\frac{aa}{bb}$, la somma non sarà più un' intero (*N.* 113.): che se'l secondo termine $\frac{2ma}{b}$ è una frazione, essa, o sarà ridotta a minori termini, o no: se si, è evidente, che 'l suo denominatore non sarà uguale al denominator bb del terzo termine $\frac{aa}{bb}$, il quale per ipotesi è parimente una frazione ridotta a minori termini (*N.* 114.); così i due termini $\frac{2ma}{b}$, $\frac{aa}{bb}$ formeranno insieme una frazione maggiore, o minore dell'unità (118.) : ma se'l secondo termine $\frac{2ma}{b}$ non è ridotto a minori termini, io'l riduco; ed è manifesto, che 'l suo denominatore

tore farà minor di b, e in confeguenza minore del denominator bb del terzo termine $\frac{aa}{bb}$: non avendo adunque il fecondo e 'l terzo termine il denominator medefimo, effi formeranno ancora infieme una frazione maggiore, o minor dell' unità (N.118.); e in confeguenza ne pur quefti due termini fommati al primo mm faranno un' intero fenza frazione.

120. TEOREMA. *Se la radice quadrata d' un numero intero non è un' intero, ella non potrà effer efpreffa ne da una frazione, ne da un numero compofto d' un' intero, e d' una frazione.*

DIMOSTRAZIONE. Se la detta radice poteffe effer efpreffa da una frazione, ne feguirebbe, che 'l prodotto di detta frazione in fe fteffa farebbe un numero intero, il ch' è impoffibile (*N.* 119.); e fe poteffe effer efpreffa da un' intero, e da una frazione, ne feguirebbe ancora, che dalla moltiplicazione d' un' intero e d' una frazione in fe avrebbefi un numero intero, il ch' è parimente impoffibile (*N.* 119.); dunque, ec.

121. COROLLARIO. Quindi ne fegue, che quando da un numero intero non poffa efattamente eftrarfi la radice, ella dovrà efprimerfi con un fegno radicale; non potendofi effa efprimer e ne con un numero intero, ne con una frazione, ne con un' intero ed una frazione: ciò ch' erami obbligato di dimoftrare (*N.* 111.).

122. TEOREMA. *Se le radici di due quadrati non differifcono che dell' unità, il quadrato maggiore fupera 'l minore di due volte la radice del minore, più l' unità.*

DIMOSTRAZIONE. Sia a la radice del primo quadrato; dunque $a + 1$ farà quella del fecondo; così 'l quadrato della prima farà aa, e quello della feconda farà $aa + 2a + 1$: ora, fe da quefto fecondo quadrato levo 'l primo aa, è evidente, che 'l refiduo farà $2a + 1$; ma quefto refiduo è 'l doppio della prima radice a più l' unità; dunque, ec.

$$\begin{array}{rl}
a + 1 & \\
a + 1 & \\
\hline
aa + a + 1 & \\
+ a & \\
\hline
aa + 2a + 1 & \textit{Quadrato} \\
aa & \\
\hline
2a + 1 & \textit{Refiduo, o Differenza.}
\end{array}$$

123. QUESTIONE. *Con 4000. e un' uomo fi vuole formare un Battaglione quadrato: pofto che vi fien degli uomini più del bifogno,* quan-

quanti converrebbe aggiugnerne, o levarne, per fare che'l quadrato fosse perfetto, e senz' alcun residuo?

RISOLUZIONE. Estraggo la radice quadrata dal numero 4001, ed ho *63* con un residuo 32; dal che io inferisco, che questo quadrato abbia *63* uomini di fronte, e *63* di fila, piu 32 di residuo: s'io voglio dunque far entrare anche questi nel Battaglione quadro, mi conviene aggiugnervi un certo numero, il quale sommato al numero 4001 faccia un quadro, la cui radice superi la radice *63* d'un' unità: ora, il quadrato, che ha *63* per radice, supera'l quadrato, che ha *64* per radice, di due volte *63* più l'unità, cioè di 126 + 1, o di 127; onde, se 4001 fos' esattamente il quadrato di *63*, e che si volesse il quadrato di *64*, si dovrebbero aggiugnere al quadrato di *63* 127 uomini: ma siccome il numero 4001 ne contiene 32 di più, così io non ne debbo aggiugnere che 127 meno 32, cioè *95*; e la somma 40*96* ha *64* per radice.

4001(*63*	127
6	32
401	95
123	4001
32	40*96*

40'*96* (*64*
6
4*96*
124
000

Che se non si volesse che'l quadrato di *63*, è manifesto, che togliendo 32 uomini da 4001, il residuo 3*969* sarebbe 'l quadro ricercato.

124. COROLLARIO. Dal Teorema precedente ne segue, che se dopo estratta la radice da un numero avanzasse qualche cosa, questo residuo sarebbe minore del doppio della radice trovata, più l'unità; e in conseguenza detto residuo aggiunto alla radice trovata non può accrescerla dell'unità; imperocchè supposto, dopo estratta la radice di 4001 ch'è *63* con 32 di residuo, che questo residuo sia uguale al doppio di *63* più 1, cioè a 127, il numero 4001 diminuito di 127 sarebbe 'l quadrato di *63*: ora, se al quadrato aggiugnesi due volte la sua radice *63* più l'unità, o sia 127, e' non sarà più il quadrato di *63*, ma quello di *64*; onde 4001 sarebb' esattamente il quadro di *64*, e in consequenza estraendone la sua radice, avrebbesi *64*, e non *63* con un residuo.

Dell'

Dell' Estrazione della Radice quadrata delle grandezze numeriche per approssimazione.

125. Quando un numero intero non è un quadrato perfetto, la sua radice non può esprimersi nè con un numero intero, nè con una frazione, nè con un' intero ed una frazione (*N.* 120.); quello adunque che si può fare in simili casi si è, di talmente approssimarsi alla sua vera radice, che 'l residuo sia minore di qualsivoglia data grandezza, quantunque incredibilmente picciola, per esempio minore d' una decima, d' una centesima, o d'una millesima parte d'unità, ec. e ciò si dice estrarre la radice per approssimazione: ma prima veggasi 'l Teorema seguente, su cui sono fondate tali estrazioni.

126. TEOREMA. *Se pigliasi l' unità, e che le si aggiunga uno, due, o tre zeri, ec. il che darà i numeri* 10, 100, 1000, 10000, *ec. i quadrati di questi numeri conterranno l' unità più 'l doppio di zeri contenuti nelle lor radici.*

La dimostrazione di tal Teorema trae la sua origine dalla moltiplicazione, e però moltiplicando i numeri 10, 100, 1000, ec. ognuno in se stesso, si vedrà; che 'l quadrato di 10, ch'è 100, contiene l'unità più due zeri, quando 'l 10 non contiene che l'unità, ed un zero; che quello di 100, ch'è 10000, contiene l'unità più quattro zeri, quando 'l 100 non contiene che l'unità, e due zeri; e così degli altri: ora, posto questo.

ESEMPIO. Per estrarre la radice dal numero 3, il quale non è un quadro perfetto, riduco il detto numero ad una frazione, il cui denominatore sia 100, cioè moltiplico 3 per 100, il che fa 300, e 'l divido per 100, il che mi dà la frazione $\frac{300}{100}$ uguale a 3 (*N.* 37.); estraggo la radice da questa frazione, cioè dal numero superior estraggo la radice del numeratore, e dall' inferior estraggo quella del denominatore; e facendo con queste due radici una nuova frazione, essa sarà la radice ricercata (*N.*104): ora, pel Teorema precedente, la radice del denominator 100 è 10; onde vengo al 300, o sia al numeratore, ed estraendone al solito la sua radice, ho 17: così la radice della frazione è $\frac{17}{10}$, od $1\frac{7}{10}$ con un residuo 11 minore d'un' unità della radice (*N.*124.), cioè minore d'un decimo; e in conseguenza estratta la radice dal 3, il residuo è minore d'un decimo.

```
3|00(17
-------
1  10
--
2.00
 27
----
 11
```

Se voglio ch' esso sia minore d'un centesimo, e che in conseguenza la radice trovata sempre più s'approssimi alla sua vera, moltiplico 3 non per 100, ma per 10000; e dividendolo per 10000, ho la frazione $\frac{30000}{10000}$ uguale a 3: ora, pel Teorema precedente, la radice del denominator è 100; non mi resta dunque ad estrarre la radice che dal numeratore, la qual' è 173, e in conseguenza la radice della frazione è $\frac{173}{100}$, od $1\frac{73}{100}$ con un residuo 71 minore d'un centesimo.

```
3'00'00(173
1       100
----
2.00
 27
----
11.00
 343
----
  71
```

Se voglio approssimarmi ancora più, aggiugno altri due zeri sì al numeratore, che al denominator della frazione $\frac{30000}{10000}$, il che fa $\frac{3000000}{1000000}$; e dico: la radice del denominator 1000000 è 1000; ond' estraendo dal numeratore la radice 1732, ho per radice del detto numero $\frac{1732}{1000}$, od $1\frac{732}{1000}$ con un residuo 276 minore d'un millesimo.

```
3'00'00'00(1732
1          1000
----
2.00
 27
----
11.00
 343
----
 71.00
 3462
----
  276
```

Ed aggiugnendo sempre due zeri al numeratore, e due al denominator, m'approssimerò sempre più al vero valore della frazione, senza mai poterlo ottenere, avanzandomi sempre un residuo; perocchè non potendosi la radice di 3 estrarre in numero intero, non si potrà estrarre nè in numero rotto, nè in numero composto d'un' intero, e d'una frazione.

127. La regola adunque è d'aggiugnere al numero, da cui si vuole estrarre la radice per approssimazione; due, quattro, o sei zeri, ec. sempre in numero pari, e d'estrarne la radice, sotto cui si collocherà l'unità con la metà de' zeri aggiunti al numero proposto: così noi avremo una frazione, che sarà la radice ricercata; e quanti più saranno i zeri, che s'aggiungono, tanto più s'approssimeremo al suo vero valore.

Dell' Estrazione della radice cuba delle grandezze numeriche.

128. Per estrarre la radice cuba da un dato numero, è necessario aver esatta contezza dei cubi de' dieci primi numeri, i quali sono i seguenti.

Ra-

Radici cube	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Se'l cubo propoſto è maggiore di qualſivoglia dei riferiti cubi, ſe n' eſtrae la radice quaſi nella ſteſſa maniera, che s' eſtrae quella delle grandezze letterali: ma la difficoltà conſiſte in trovare i poſti, ch' occupano i differenti prodotti contenuti dal cubo propoſto; e però eſaminiamo prima come ſi formi un cubo.

Per innalzare al cubo il numero 54, il moltiplico in ſe ſteſſo, e ſcrivo ogni prodotto nel ſuo poſto ſenza nulla riſervare; il che mi dà i quattro prodotti contenuti nel quadrato di 54: così la ſomma di queſti quattro prodotti darebbemi il quadro di 54, non altrimenti che ſe aveſſi moltiplicato il detto numero col ſolito metodo; e in conſeguenza moltiplicando ancora queſti quattro prodotti per 54, il prodotto totale sarà'l ſuo cubo.

Scrivo perciò di ſotto il numero 54, e moltiplicando ciaſcun prodotto per 4 e per 5, avrò otto prodotti, i quali ſommati inſieme fanno'l cubo di 54, ch'è 157464.

```
      54
      54
    ----
      16
     20
     20
    25
   -----
      54
   -----
     |64
     |80
     |80
   10|0
     |80
   10|0
   10|0
  125|
  --------
  157|464 Cubo
```

Diſtinguo con una lineeta i caratteri di queſto cubo a tre a tre in varie parti, o membri da dritta a ſiniſtra, e veggo; che'l cubo 125 del primo carattere 5 è a ſiniſtra della prima linea da ſiniſtra a dritta; che i tre prodotti 100, 100, 100 ſono parte a ſiniſtra, e parte a deſtra di detta prima linea; che i tre prodotti 80, 80, 80 ſono a deſtra della ſteſſa prima linea; e finalmente, che'l cubo 64 del ſecondo carattere 4 della radice è a ſiniſtra della ſeconda linea.

Ora, ognuno dei tre prodotti 100, 100, 100 è'l prodotto del quadrato 25 del primo carattere 5 della radice moltiplicato pel ſecondo carattere 4; e ognuno dei tre prodotti 80, 80, 80 è'l prodotto del quadrato 16 del ſecondo carattere 4 della radice moltiplicato per lo primo carattere 5: onde il cubo di 54 diſtinto con varie lineette contiene a ſiniſtra della prima il cubo del primo ca-

ratteere 5 ; parte a finiſtra, e parte a deſtra della ſteſſa prima linea contiene tre quadrati di detto primo carattere 5 moltiplicati pel ſecondo ; a deſtra della prima linea contiene tre quadrati del ſecondo carattere 4 moltiplicati per lo primo ; e finalmente a finiſtra della ſeconda contiene il cubo del ſecondo carattere.

Che ſe 'l cubo aveſſe ancora più linee, il che ſarebbe impoſſibile, quando la ſua radice non aveſſe più caratteri ; ſempre i cubi del primo, del ſecondo, del terzo, ec. ſarebbero a ſiniſtra della prima, della ſeconda, della terza linea, ec. e ſempre i prodotti contenuti dal cubo ſarebbero parte a ſiniſtra, e parte a deſtra delle dette linee: ora, poſto queſto.

PRIMO ESEMPIO. Per eſtrarre la radice cuba da 804357, tiro due linee, l' una ſotto di queſto numero, e l'altra a deſtra per iſcriverle accanto la radice ; diſtinguo i caratteri di detto numero a tre a tre in varj membri da dritta a ſiniſtra, e dico: il cubo maggiore contenuto ne' tre primi caratteri 804, che ſono a ſiniſtra della prima linea, è 729, ch' io trovo mediante la tavola dei cubi de' dieci primi numeri; ſcrivo la radice 9 del cubo 729 nel poſto deſtinato per le radici, e ſottratto il detto cubo da 804, il reſiduo è 75.

```
804'357(93
729            729
 75·357         243
 243             27
 75 357        75377
 00000
```

Abbaſſo i caratteri 357 del cubo; e facendo 'l quadrato 81 del primo carattere 9 della radice, il moltiplico per 3, e mi dà 243 : ora, in 753 contienſi 'l triplo del quadrato della prima radice moltiplicato per la ſeconda ; ſcrivo adunque 243 ſotto di queſto numero, in maniera che 'l ſuo ultimo carattere 3 ſia a deſtra della prima linea, ed a mano a mano ch'abbaſſo i caratteri 357 compreſi fra la prima e la ſeconda linea, ne ſegno il poſto con un punto; divido per tanto 753 per 243, e 'l quoziente 3 (eſſendo 'l numero, che moltiplica 243 in 753) è di neceſſità la ſeconda radice.

Moltiplico 243, ch' è la ſomma de' tre quadrati della prima radice per la ſeconda 3, e ne ſcrivo a parte il prodotto 729; faccio 'l quadrato 9 della ſeconda radice, e moltiplicandolo prima per 3, a fine d' averne il triplo, indi per la prima radice 9, il che mi dà 243, ſcrivo 243 ſotto 729, ma un poſto più innanzi verſo dritta, perchè il cubo propoſto contiene 'l prodotto 243 avanzando

do d'un posto; faccio finalmente il cubo 27 della seconda radice, e lo scrivo sotto 'l prodotto 243, ma un posto più innanzi verso dritta, perchè il cubo proposto contiene 'l cubo 27 scritto in questo modo; e facendo la somma de' tre prodotti, ch' è 75357, la scrivo sotto 'l residuo 75357, e sottraendola dal detto residuo, null' avanza: così la radice ricercata è 93; perocchè dal cubo proposto sottraendo il cubo del primo carattere, il triplo del quadro di esso primo carattere moltiplicato pel secondo, il triplo del quadro del secondo moltiplicato per lo primo, e finalmente il cubo del secondo, nulla è avanzato.

II. ESEMPIO. Per estrarre la radice cuba dal numero 80621568, il distinguo in varj membri, e trovo, che la radice avrà tre caratteri, perchè il detto numero è diviso in tre membri.

Dico dunque: il cubo maggiore contenuto ne' caratteri 80, che sono a sinistra della prima linea, è 64, la cui radice cuba è 4, ch' io trovo mediante la tavola dei cubi de' dieci primi numeri; scrivo adunque 4 nel posto destinato per la radice, e 64 sotto l' 80; levo 64 da 80, e 'l residuo è 16.

80621,568(432	
64	144
16.621	108
48	27
15 507	15507
1 114.568	11094
5547	516
1 114 568	8
0000000	1114568

Abbasso i tre caratteri 621, che sono fra la prima, e la seconda linea; faccio 'l quadrato del primo carattere, e moltiplicandolo per 3, ho 'l prodotto 48; e perciocchè 48 moltiplicato per la seconda radice contiensi nei tre caratteri 166, divido 166 per 48, e 'l quoziente 3 è la seconda radice; moltiplico 48 per la seconda radice 3, e ne scrivo a parte il prodotto 144; faccio 'l quadrato della seconda radice 3, il moltiplico per 3, e poi per la prima radice 4, e scrivo il prodotto 108 sotto 144, ma un posto più innanzi verso dritta; finalmente, faccio 'l cubo 27 della seconda radice, e lo scrivo sotto 108, ma nel modo sopr' accennato: faccio la somma 15507 dei prodotti scritti a parte, e sottraendola dal residuo 16621 della prima operazione, resta 1114.

Abbasso i tre caratteri 568, che sono fra la seconda e la terza linea, e facendo 'l quadrato delle due prime radici 43, il moltiplico per 3, il che fa 5547: ora, questo prodotto moltiplicato per la

la terza radice contiensi in 11145 ; scrivo dunque 5547 sotto 11145 ; e dividendo 11145 per 5547 , il quoziente 2 è la terza radice ; moltiplico 5547 per la terza radice 2, e ne scrivo a parte il prodotto 11094 ; faccio 'l quadrato della terza radice 2, il moltiplico per 3 e per la somma 43 delle due prime radici , e scrivo 'l prodotto 516 sotto 11094 , ma un posto più innanzi verso dritta ; faccio finalmente il cubo 8 della terza radice , e lo scrivo sotto 516 , ma nell' istessa maniera che sopra : faccio la somma 1114568 de' tre prodotti scritti a parte , e sottraendola dal residuo 1114568 della seconda operazione, null' avanza ; così la radice ricercata è 432.

129. Se dopo preso 'l triplo del quadrato della prima radice ; e diviso il residuo per questo triplo si trovasse per seconda radice un numero sì fatto , che continuando l' operazione fin al secondo membro, la somma de' tre prodotti scritti a parte fosse maggiore di ciò, che sarebbe restato dopo tolto il primo cubo , dovrebbesi scemare la seconda radice d' una, di due, o di tre unità, ec. finattanto che dalla somma de' tre prodotti si potesse far la sottrazione; il che si dovrebbe ancora avvertire, posto che vi fossero nuove operazioni da farsi.

IV. ESEMPIO. Per estrarre la radice cuba dalla frazione $\frac{1331}{1728}$, estraggo dal numeratore la radice cuba 11, e dal denominatore la radice cuba 12 , e scrivendo $\frac{11}{12}$, ho la radice ricercata ; e così dell' altre. Ciò si trova dimostrato nel sesto esempio dell' estrazione delle radici delle grandezze letterali.

Dell' Estrazione della radice cuba delle grandezze numeriche per approssimazione.

130. L' estrazione delle radici cube de' numeri per approssimazione si fa quasi nello stesso modo che quella delle radici quadrate , e dipende dal Teorema seguente.

131. TEOREMA. *Se piglinsi i numeri 10, 100, 1000, ec. i quali hanno l' unità aggiunta ad uno, due, o tre zeri, ec. i cubi di questi numeri avranno l' unità più 'l triplo de' zeri contenuti nella lor radice.*

Si facciano i cubi dei detti numeri , e si vedrà , che 'l cubo di 10 è 1000, cioè che 'l cubo 1000 contiene tre zeri , quando la sua radice 10 non ne contiene che un ; che quello di 100 è 1000000, cioè che 'l cubo 1000000 contiene sei zeri, quando la sua ra-

radice 100 non ne contiene che due; e così degli altri: ora, posto questo.

Per estrarre la radice cuba dal numero 9, vi aggiungo o tre, o sei, o nove zeri, e così successivamente, crescendo sempre di tre, ch'è come se riducessi il numero 9 ad una frazione, il cui denominatore fosse o 1000, od 1000000; il che darebbe o la frazione $\frac{9000}{1000}$, o $\frac{9000000}{1000000}$, ec. ora, pel Teorema precedente, la radice cuba del denominator è 10, quando 'l denominatore è 1000; è 100, quando 'l denominatore è 1000000, ec. ond'estraendo la radice cuba dal numeratore, avrei dei decimi per radice, quando la frazione fosse $\frac{9000}{1000}$; dei centesimi, quando la frazione fosse $\frac{9000000}{1000000}$, ec. ed avrei sempre un residuo minore d'un'unità della radice, il quale però non potrebbe accrescerla d'un'unità. Tali operazioni son sì facili, ch'io penso per maggior brevità d'ometterle; ecco non per tanto un Teorema, mediante cui farem vedere, che quello resta dopo fatta l'estrazione non può accrescer la radice d'un'unità.

132. TEOREMA. *Se due numeri non differiscono che dell'unità, il cubo del maggiore supera 'l cubo del minore di tre volte il quadrato della radice del minore, più tre volte questa radice, più l'unità.*

DIMOSTRAZIONE. Chiamo a il numero minore, e in conseguenza $a + 1$ sarà 'l secondo; faccio 'l cubo di $a + 1$, ed ho $a^3 + 3aa$, $+ 3a + 1$; levo da questo il cubo a^3 del numero minore, e 'l residuo $3aa + 3a + 1$ è l'eccesso del maggiore sopra 'l minore: ora, quest'eccesso contiene tre quadrati della radice a del minore, più tre volte questa radice, più l'unità; dunque, ec.

$$
\begin{array}{llllllll}
a & + & 1 & & & & & \\
a & + & 1 & & & & & \\
\hline
aa & + & a & + & 1 & & & \\
 & + & a & & & & & \\
\hline
aa & + & 2a & + & 1 & & & \textit{Quadrato} \\
a & + & 1 & & & & & \\
\hline
a^3 & + & 2aa & + & a & & & \\
 & + & aa & + & 2a & + & 1 & \\
\hline
a^3 & + & 3aa & + & 3a & + & 1 & \textit{Cubo del maggiore} \\
a^3 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \textit{Cubo del minore} \\
\hline
 & & 3aa & + & 3a & + & 1 & \textit{Differenza.}
\end{array}
$$

133. Onde per far vedere, che quello resta dopo l'estrazione d'una radice cuba non potrebbe accrescer detta radice d'un'unità, si pigli

pigli 'l numero 9, ed estraggasi la radice col metodo sopra insegnato; cioè si moltiplichi 9 per 1000, e per l' istesso 1000 si divida il prodotto, il che darà la frazione $\frac{9000}{1000}$ uguale a 9: ora, la radice cuba del denominator è 10; ond' estraendo la radice cuba 20 dal numeratore, s' avrà per radice prossima $\frac{20}{10}$, o 2 con un residuo 1000; così 'l numeratore 9000 scemato di questo residuo, o sia 8000 sarebb' esattamente il cubo del numerator 20 della radice; e perciò se si vuole, che 'l residuo 1000 possa accrescer la radice d' un' unità, cioè che la radice sia 21, in vece di 20, converrà necessariamente, ch' ei sia uguale a tre volte il quadrato della radice 20, più tre volte questa radice, più l'unità: ma se questo residuo 1000 fosse uguale alla somma di queste tre grandezze, aggiunto al cubo 8000 di 20 sarebb' esattamente il cubo di 21; e in conseguenza, dopo estratta la radice da 9000, avrebbesi per radice 21, senz' alcun residuo.

$9000(20$
$8 \quad 10$
1.000
12
0000
1000

134. Nè si può dire, che ridotto il numero 9 ad una frazione maggiore, per esempio a $\frac{9000000}{1000000}$, o sia $\frac{9000000000}{1000000000}$, ec. potrebbe succedere, che dopo l' estrazione della radice null' avanzasse, perchè in tal caso potrebbesi trovare la radice esatta di 9; giacchè la frazione, da cui si fosse estratta la radice, sarebbe uguale a 9, e questa radice sarebbe o un numero intero, od una frazione minore dell' unità, o finalmente un' intero ed una frazione: ora, ella non può essere un numero intero, non essendovi alcun' intero, che moltiplicandosi due volte successivamente in se stesso produca 9; oltre di che, se questa radice fosse un numero intero troverebbesi con le regole ordinarie, senza che fosse d' uopo di ridurre il numero 9 ad una frazione: non può la stessa essere una frazione minore dell' unità, giacchè una frazione minore dell' unità produce una frazione minore ancora di se (*N.* 119.), e questo prodotto moltiplicato per la stessa frazione produce un' altra frazione altresì di se minore (*N.* 119.): non può finalmente essere un' intero, ed una frazione, perocchè dalla moltiplicazione d' un' intero e d' una frazione in se ne risulta per prodotto un' intero ed una frazione (*N.* 119.), e questo prodotto moltiplicato per l' intero e la frazione, che l' han prodotto, produce ancora un' intero, ed una frazione, la cui radice non può esser esatta; e però di necessità conviene esservi sempre qualche residuo.

135. E' bene assuefarsi a tali estrazioni, perchè i numeri non quadrati sono in maggior copia de' quadrati.

136. Tro-

136. Trovanſi in alcuni Libri d'Aritmetica cert' eſtrazioni fatte per approſſimazione, le quali non ſono fondate ſopr' alcun principio, e però da non farne conto veruno.

Del Calcolo delle grandezze Radicali.

137. Le grandezze *radicali* non differiſcono da quelle, che noi chiamiam *ſorde*, *irrazionali*, o *incommenſurabili* (*N.* 104.) : il numero, o la lettera ſcritta ſotto'l ſegno è la potenza, da cui ſi vuole eſtrar la radice; e'l ſegno radicale col numero ſcritto ſopra eſprime il grado della radice, che ſi vuol eſtrarre. $\sqrt{a}$, o ſia $\sqrt[2]{a}$ ſignifica, che ſi vuole eſtrar la radice quadrata dalla grandezza a; $\sqrt[3]{b}$ ſignifica, che ſi vuole eſtrar la radice cuba dalla grandezza b; e così dell'altre.

138. Quantunque le grandezze radicali ſieno incommenſurabili in ſe ſteſſe, in modo che non ſi poſſa eſprimere il rapporto, ch' eſſe hanno con qualunque altra data grandezza, poſſono tuttavolta eſſer *fra loro commenſurabili*. Non ſi può, per eſempio, eſprimere coſa ſia $\sqrt{3}$ riſpetto ad alcun numero intero, o rotto, o compoſto d'un'intero e d'una frazione; ma tuttavia ſi conoſce facilmente, che $\sqrt{3}$ è'l terzo di $3\sqrt{3}$, il quarto di $4\sqrt{3}$, ec. e ciò ogni volta, che le grandezze ſcritte ſotto'l ſegno radicale ſaranno le ſteſſe, e che'l ſegno radicale ſarà del medeſimo grado; imperocchè mancando l'una, o l'altra di queſte due condizioni, le grandezze radicali non avrebbero maggior rapporto tra loro, di quello ne hanno con interi, o frazioni, o con interi e frazioni: così, quantunque le radici ſieno dell' iſteſſo genere, tuttavolta il rapporto di $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ non può eſprimerſi, a cagione che le grandezze ſcritte ſotto'l ſegno ſono differenti. Similmente, $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[4]{2}$ non hanno un rapporto, che ſi poſſa eſprimere, perocchè i gradi 3 e 4 delle lor radici ſono differenti; e nulla ſerve, che'l numero ſcritto ſotto d' eſſe ſia'l medeſimo.

139. Le grandezze radicali diconſi *comunicanti*, o *commenſurabili fra loro*, quando i gradi de'ſegni radicali, e le grandezze ſcritte ſotto al ſegno ſon ſimili.

140. Mediante alcune preparazioni, le quali dipendono da' due Teoremi ſeguenti, ſi poſſono fare tutte l'operazioni dell'Aritmeti-

ca, e dell'Algebra, tanto sopra le grandezze radicali, come sopra quelle, che radicali non sono.

141. TEOREMA. *Se due quadrati si moltiplican insieme, il prodotto sarà un nuovo quadro, la cui radice sarà uguale al prodotto delle radici quadrate de' due quadri; lo stesso si dica di due cubi moltiplicati insieme, di due quarte, o quinte potenze, ec.*

Sieno i due quadrati aa e bb; li moltiplico insieme, e'l prodotto è $aabb$, la cui radice quadra ab è uguale al prodotto delle radici a, b de' due quadrati. Sieno parimente a^3, b^3 i due cubi; li moltiplico insieme, e'l prodotto è a^3b^3, la cui radice cuba ab è uguale al prodotto delle due radici a, b de' due cubi; e così dell'altre potenze.

142. TEOREMA. *La radice quadra d'una grandezza è uguale alla quarta radice del quadrato di detta grandezza, alla sesta del suo cubo, all'ottava della sua quarta potenza, e così successivamente, crescendo l'esponente della radice di due unità, a misura che le potenze della data grandezza crescon d'una. Similmente, la radice cuba d'una grandezza è uguale alla stessa radice del quadrato di detta grandezza, alla nona del suo cubo, ec crescendo l'esponente della radice di tre unità, a misura che le potenze della data grandezza crescon d'una; e lo stesso si dica delle radici più innalzate, crescendo gli esponenti delle stesse di 4, 5, o 6 unità, ec. a misura che le potenze della data grandezza crescon d'una.*

Se pigliamo le potenze successive della grandezza a, le quali sono a, aa, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, ec. è evidente, che la grandezza a è la radice quadra di aa, la radice cuba di a^3, la quarta radice di a^4, e così successivamente: ora, il quadrato di aa è a^4; e in conseguenza la radice quadra della grandezza aa è simile alla quarta radice di a^4 quadrato di aa. Parimente, il cubo di aa è a^6; la sua quarta potenza è a^8; la sua quinta è a^{10}; ec. e in conseguenza la radice quadrata di aa è la radice sesta del cubo di aa, l'ottava della sua quarta potenza, la decima della sua quinta, ec.

Così pure, il quadrato di a^3 è a^6; il suo cubo è a^9; la sua quarta potenza è a^{12}, ec. dunque la radice cuba di a^3, ch'è a, è uguale alla radice sesta del quadrato di a^3, alla radice nona del suo cubo, alla duodecima della sua quarta potenza, ec.

Si troverà parimente, che a radice quadra di a^4 è l'ottava radice del quadrato di a^4, la duodecima del suo cubo, ec. crescendo sempre l'esponente della radice di 4 unità, a misura che l'esponente

te delle potenze di a^4 cresce d'una. Tutto ciò è facilissimo, e per toglier ogni difficoltà, che vi possa essere, basta il rendersi famigliare quello, che s'è spiegato.

Cangiare una grandezza non radicale in un'altra, che sia radicale, e'l cui esponente sia dato.

143. Debbasi cangiare la grandezza radical a in un'altra, ch'abbia'l segno $\sqrt[2]{}$, o semplicemente $\sqrt{}$, tanto essendo l'un, come l'altro: faccio'l quadrato di a, ch'è aa, e scrivo $\sqrt[2]{aa}$, o $\sqrt{aa}$, perciocchè quest'espressione $\sqrt{aa}$ denota la radice quadra del quadrato aa, ch'è a; e in conseguenza $a = \sqrt{aa}$.

Se in vece il segno radicale fosse stato $\sqrt[3]{}$, avrei innalzato la grandezza a alla sua terza potenza a^3, ed avrei scritto $\sqrt[3]{a^3}$; perocchè $\sqrt[3]{a^3}$ significa la radice cuba di a^3: ma questa radice è a; onde $a = \sqrt[3]{a^3}$; e così dell'altre.

La regola dunque è d'innalzare la data grandezza alla potenza denotata dal grado della radice, e di scrivere detta potenza sotto'l segno radicale, con sopra il grado della radice medesima; ciò che dicesi *far passare una grandezza sotto'l segno radicale*.

Per cangiare la grandezza $a\sqrt{b}$ in un'altra, in cui tutto si trovi sotto'l segno, faccio'l quadrato di a, ch'è aa, e scrivo $\sqrt{aab}$; perocchè la grandezza a è uguale a $\sqrt{aa}$, ed a moltiplicata per $\sqrt{b}$ è uguale alla grandezza $\sqrt{aa}$ moltiplicata per $\sqrt{b}$, o sia alla radice del quadro aa moltiplicata per la radice del quadrato b: ma quando due radici quadre si moltiplican insieme, il prodotto, che ne risulta, è un numero uguale alla radice del quadrato, che produrrebbero i due quadri delle due radici (*N.* 141.); e'l prodotto de'due quadrati sarebbe aab: onde la radice prodotta dalle due radici $\sqrt{aa}$, $\sqrt{b}$ dee esser $\sqrt{aab}$; e così dell'altre.

Tirare una grandezza fuori del segno radicale.

144. Per tirare fuori del segno radicale la grandezza $\sqrt{4}$, dico: la radice quadrata di 4 è 2; così scrivo 2, in vece di $\sqrt{4}$: scri-

M 2 vo

vo similmente a, in vece di $\sqrt[3]{a^3}$; ab, in vece di $\sqrt[4]{a^4b^4}$, e così dell'altre; il che non è necessario, ch'io dimostri.

Ma se la grandezza scritta sotto 'l segno non è una potenza perfetta del grado denotato dalla radice, esamino, se mai fosse il prodotto di qualche potenza di questo grado moltiplicata per un'altra grandezza non innalzata allo stesso grado; il che supposto, lascio sotto 'l segno la grandezza, che non è del medesimo grado, ed estraendo la radice dall'altra la scrivo fuori del segno.

In $\sqrt{aab}$ veggo, che 'l quadro aa è moltiplicato per b, che non è un quadro: onde lascio b sotto 'l segno; ed estraendo la radice a dal quadrato aa, scrivo $a\sqrt{b}$, in vece di $\sqrt{aab}$.

Veggo similmente in $\sqrt{18}$, che la grandezza 18 non è un quadrato; ma conosco altresì, che 18 è 'l prodotto del quadrato 9 per 2, che non è un quadro: lascio però 2 sotto 'l segno; ed estraendo la radice 3 dal quadrato 9, scrivo $3\sqrt{2}$, in vece di $\sqrt{18}$.

Veggo ancora in $\sqrt{a^3c}$, che la grandezza a^3 è un cubo, e che la grandezza c non l'è: lascio però c sotto 'l segno; e da a^3 estraendo la radice cuba a, scrivo $a^3\sqrt{c}$, in vece di $\sqrt[3]{a^3c}$.

Veggo finalmente in $\sqrt[3]{54}$, che la grandezza 54 non è un cubo; ma conosco altresì, che 54 è 'l prodotto di 27 per 2: ora, 27 è un cubo, e 2 non l'è: lascio adunque 2 sotto 'l segno; ed estraendo la radice cuba dal cubo 27, scrivo $3\sqrt[3]{2}$, in vece di $\sqrt[3]{54}$, ec.

Manifesta di ciò n'è la ragione, potendo concepire in $\sqrt{aab}$, che la grandezza aab sia 'l prodotto del quadrato aa pel quadro b: ma due quadrati, che insieme si moltiplicano, ne producon un'altro, la cui radice è uguale al prodotto delle radici quadrate de' due quadri moltiplicati (*N.* 141); dunque $\sqrt{aab}$ è 'l prodotto delle radici de' quadrati aa, b, cioè 'l prodotto della grandezza $\sqrt{aa}$ moltiplicata per la grandezza $\sqrt{b}$: ma $\sqrt{aa}$ è uguale ad a; onde la grandezza $\sqrt{aa}$ moltiplicata per $\sqrt{b}$, o $\sqrt{aab}$ è uguale ad $a\sqrt{b}$; e lo stesso si dimostrerà in tutti gli altri casi.

145. *Il ridurre le grandezze radicali ai loro esponenti, o a' loro minori termini* altro non è, che tirare le grandezze fuori del segno.

146. Talvolta succede, che due grandezze, le quali hanno il medesimo segno, si rendono tra loro commensurabili (quando prima non l'erano) col solo ridurle a minori termini: se riduconsi, per esempio, le grandezze $\sqrt{8}$ e $\sqrt{18}$ a minori termini, s'avrà $2\sqrt{2}$, e $3\sqrt{2}$, che sono grandezze fra loro commensurabili.

Ri-

Ridurre a un' iſteſſo ſegno due, o più grandezze Radicali, le quali hanno differenti ſegni.

147. Per ridurre a un' iſteſſo ſegno le due grandezze $\sqrt[2]{a}$, e $\sqrt[6]{b}$, conviene far divenir *6* l' eſponente 2 di $\sqrt[2]{a}$; il chè s' ottiene pigliandolo tre volte: ora, $\sqrt[2]{a}$, eſſendo la radice quadra di *a*, è uguale alla radice quarta del quadrato di *a*, e alla ſeſta del ſuo cubo (*N.* 142.); onde innalzando *a* al cubo, il che fa a^3, ſcrivo $\sqrt[6]{a^3}$, ch' è uguale *a* $\sqrt[2]{a}$; così io ho le grandezze $\sqrt[6]{a^3}$, e $\sqrt[6]{b}$, le quali hanno il medeſimo ſegno.

Per ridurre al medeſimo ſegno le due grandezze $\sqrt[2]{2}$, ed $\sqrt[8]{3}$, dico: l' eſponente 2 di $\sqrt[2]{2}$ contienſi preciſamente quattro volte nell' altr' eſponente; e però è d' uopo pigliarlo quattro volte per avere l' eſponente 8: ora, $\sqrt[2]{2}$, eſſendo la radice quadra di 2, è uguale alla quarta radice del quadrato di 2, alla ſeſta del ſuo cubo, all' ottava della ſua quarta potenza, ec. onde innalzando 2 alla ſua quarta potenza *16*, ſcrivo $\sqrt[8]{16}$, in vece di $\sqrt[2]{2}$; ed ho le due grandezze $\sqrt[8]{16}$, ed $\sqrt[8]{3}$, le quali hanno il medeſimo ſegno, ec.

148. Se'l minore de' due eſponenti non foſs' eſattamente contenuto nel maggiore eſſi ſi moltiplicherebbero inſieme; e 'l prodotto ſarebbe l' eſponente della radice delle due grandezze.

Per ridurre al medeſimo ſegno $\sqrt[3]{a}$, e $\sqrt[5]{b}$, moltiplico inſieme gli eſponenti 3, e 5; il che dà 15, cioè l' eſponente della radice delle due grandezze: ora, $\sqrt[3]{a}$, eſſendo la radice cuba di *a*, è in conſequenza la radice ſeſta del quadrato di *a*, la nona del ſuo cubo, la duodecima della ſua 4ª. potenza, e la quindecima della ſua quinta; così innalzando *a* alla quinta potenza a^5, ſcrivo $\sqrt[15]{a^5}$, in vece di $\sqrt[3]{a}$: parimente, $\sqrt[5]{b}$, eſſendo la radice quinta di *b*, è in conſeguenza la radice decima del quadrato di *b*, e la quindecima del ſuo cubo; onde innalzando *b* al cubo, il che mi dà b^3, ſcrivo

vo $\sqrt[15]{b^3}$, in vece di $\sqrt[5]{b}$; ed ho le grandezze $\sqrt[15]{a^5}$ e $\sqrt[15]{b^3}$, le quali hanno il medeſimo ſegno.

Per ridurre ad un'iſteſſo ſegno le tre grandezze $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, e $\sqrt[4]{c}$, moltiplico inſieme i tre eſponenti 2, 3, e 4; e mi danno 24: ma perocchè 12 può eſſer diviſo eſattamente da 2, da 3, e da 4, piglio 12 per l'eſponente comune delle radici: ora, $\sqrt[2]{a}$, eſſendo la radice quadra di a, è in conſeguenza la radice quarta del ſuo quadrato, la ſeſta del ſuo cubo, l'ottava della ſua quarta potenza, la decima della ſua quinta, e la duodecima della ſua ſeſta; così innalzando a alla ſeſta potenza, il che mi dà a^6, ſcrivo $\sqrt[12]{a^6}$, in vece di $\sqrt[2]{a}$; e diſcorrendo egualmente ſull'altre due, ho $\sqrt[12]{b^4}$ e $\sqrt[12]{c^3}$, e così dell'altre. (*a*)

Sommare le grandezze Radicali.

149. Quando le grandezze radicali ſono comunicanti, o commenſurabili fra loro, ſi ſommano inſieme le grandezze, che ſono fuori del ſegno; così per ſommare $2\sqrt{3}$ con $4\sqrt{3}$, giungonſi le due grandezze 2 e 4, che ſono fuori del ſegno, il che fa 6; e ſcriveſi $6\sqrt{3}$. Per ſommare $3\sqrt{5}$ con $4\sqrt{5}$, ſcriveſi $7\sqrt{5}$; e così dell'altre.

Ma ſe queſte grandezze non ſono comunicanti riduconſi prima al medeſimo ſegno, indi ai loro eſponenti; e ſe con ciò eſſe di-

(*a*) Nota. ***E' viſibile, che la riduzione de' radicali a' medeſimi ſegni ſia la ſteſſa che quella delle frazioni allo ſteſſo denominatore. In fatti, ſe i due radicali $\sqrt[4]{a^2}$, $\sqrt[3]{b^4}$ ſi ſcrivono in queſto modo, $a^{\frac{2}{4}}$, $b^{\frac{4}{3}}$, e ſe i nuovi eſponenti $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{3}$ ſi riducono allo ſteſſo denominatore in queſto modo, $\frac{6}{12}\frac{16}{}$; il numero 12, denominator comune delle due nuove frazioni, ſarà ancora il ſegno comune de' due radicali, che ſi cercano; e i due denominatori 6 e 16 ſaranno gli eſponenti de' radicali medeſimi: ſicchè $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[12]{a^6}$, e $\sqrt[3]{b^4} = \sqrt[12]{b^{16}}$: ciò che ſi avea a dichiarare.***

divengono fra loro commensurabili, si sommano, come s'è detto: altrimenti, si sommano scrivendo infra esse il segno $+$.

Per sommare le due grandezze $\sqrt[3]{81}$, e $\sqrt[3]{192}$, trovo che 'l numero 81 della prima è 'l prodotto del cubo 27 per 3; lascio però 3 sotto 'l segno, ed estraendo dal 27 la radice cuba 3, scrivo $3\sqrt[3]{3}$, in vece di $\sqrt[3]{81}$; trovo parimente, che 'l numero 192 della seconda grandezza è 'l prodotto del cubo 64 per 3; lascio adunque 3 sotto 'l segno, ed estraendo da 64 la radice cuba 4, scrivo $4\sqrt[3]{3}$: sommo dopo ciò le grandezze 3 e 4, che sono sotto 'l segno, il che fa 7, e scrivo $7\sqrt[3]{3}$.

Per sommare insieme $\sqrt[2]{2}$, e $\sqrt[3]{4}$, moltiplico i due esponenti fra loro, il che mi dà l'esponente comune 6; poscia operando, come s'è detto (*N.* 147.), ho $\sqrt[6]{8}$, e $\sqrt[6]{16}$; e perocchè non posso ridurre queste grandezze a minori termini, le sommo insieme scrivendo $\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{16}$; benchè la più spedita, quando si vede di non poterle render comunicanti, sia di scriver $\sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Sottrarre le grandezze Radicali.

150. Se le grandezze sono comunicanti, si toglie la grandezza, ch'è fuori del segno della minore, dalla grandezza, ch'è fuori del segno della maggiore; e 'l residuo scritto col segno, e con la grandezza, ch'è sotto, è la sottrazione ricercata.

Per sottrarre $2\sqrt{3}$ da $6\sqrt{3}$, si toglie 2 da 6, e scrivesi il residuo $4\sqrt{3}$; e così dell'altre.

Ma se queste grandezze non sono comunicanti, procuro di renderle tali mediante le regole di sopra date; e se lo divengono, si leva l'una dall'altra, come s'è veduto: ma se tali non divengono, si fa la sottrazione servendosi del segno $-$.

Per sottrarre la grandezza $\sqrt[3]{4}$ dalla grandezza $\sqrt[2]{2}$, riduconsi le stesse al medesimo segno, il che fa $\sqrt[6]{16}$, e $\sqrt[6]{8}$; e scrivesi $\sqrt[6]{8} - \sqrt[6]{16}$, ovvero semplicemente $\sqrt[2]{2} - \sqrt[3]{4}$.

Mol-

Moltiplicare le grandezze Radicali.

151. Cura di chi moltiplica le grandezze proposte sia di prima ridurle a minori termini, e di darle un' istesso segno; perocchè le sole radici d'un medesimo grado possono dar di prodotto una radice d'un'istesso grado. Le grandezze $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{5}$ moltiplicandosi insieme producono $\sqrt[3]{10}$, cioè la radice del cubo, che sarebbe il prodotto de' cubi 2, e 5 (*N.* 141.): ma $\sqrt[2]{2}$ e $\sqrt[3]{5}$ non producono ne $\sqrt[2]{10}$, ne $\sqrt[3]{10}$.

Onde ciò fatto si moltiplicano le grandezze, che sono fuori del segno, e quelle, che son sotto, in se stesse; e scrivonsi i due prodotti, frapponendovi 'l segno radicale.

Per moltiplicare $\sqrt[2]{a}$ per $\sqrt[2]{b}$, scrivesi $\sqrt[2]{ab}$; e per moltiplicare $a\sqrt[3]{c}$ per $b\sqrt[3]{d}$, scrivesi $ab\sqrt[3]{cd}$. Similmente, $3\sqrt{2}$ per $4\sqrt{6}$ dà $12\sqrt{12}$, ovvero riducendo $\sqrt{12}$ a minori termini, si ha $2\sqrt{3}$, a cagione che 12 è 'l prodotto del quadrato 4 pel numero 3, che non è un quadrato; e scrivesi $12\times2\sqrt{3}$, o sia $24\sqrt{3}$; e così dell' altre grandezze.

Per moltiplicare $a+c\sqrt{d}$ per $a+b\sqrt{c}$, scrivo queste due grandezze l'una sotto dell'altra, cioè l'intere sotto l'intere, e le radicali sotto le radicali; e le moltiplico al solito: così a per a da aa; a per $c\sqrt{d}$ dà $ac\sqrt{d}$; a per $b\sqrt{c}$ dà $ab\sqrt{c}$; e $c\sqrt{d}$ per $b\sqrt{c}$ dà $cb\sqrt{dc}$.

$$\begin{array}{l} a+c\sqrt{d} \\ a+b\sqrt{c} \\ \hline aa+ac\sqrt{d}+ab\sqrt{c}+bc\sqrt{dc} \end{array}$$

Per moltiplicare $a+b\sqrt{d}$ per $a-b\sqrt{d}$, faccio la moltiplicazione, come nell'esempio sopra addotto; ed ho $aa-bb\sqrt{dd}$: ma $\sqrt{dd}$ è uguale a d: onde $-bb\sqrt{dd}$ è uguale $a-bb\times d$, o sia $-bbd$; e in conseguenza il prodotto è $aa-bbd$.

$$\begin{array}{lll} & a+b\sqrt{d} & \\ & a-b\sqrt{d} & \\ \hline & aa+ab\sqrt{d} & -bb\sqrt{dd} \\ & \quad -ab\sqrt{d} & \\ \hline & aa & -bb\sqrt{dd} \\ \text{od} & aa & -bbd \end{array}$$

Dal che apparisce, che la moltiplicazione fa talvolta svanire le grandezze radicali.

Di-

Dividere le grandezze Radicali.

152. La principal cura, prima di dividere, è di fare le stesse preparazioni, che si son fatte per la moltiplicazione; poscia si dividono le grandezze, che sono fuori del segno, per quelle, che son fuori, e quelle, che sono sotto, per quelle, che son sotto; e scrivonsi i due quozienti.

La grandezza $\sqrt{ab}$ divisa per $\sqrt{b}$ dà $\sqrt{a}$; perocchè moltiplicando il quoziente $\sqrt{a}$ pel divisore $\sqrt{b}$, si ha 'l dividendo $\sqrt{ab}$. Similmente, la grandezza $cb\sqrt{a^2d}$ divisa per $c\sqrt{ad}$ dà $b\sqrt{a}$, e così dell' altre.

Che se la divisione non potesse farsi, scriverebbesi 'l divisore sotto al dividendo; così per dividere $a\sqrt{c}$ per $b\sqrt{d}$, scrivesi $\frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{d}}$ ec.

Per dividere la grandezza complessa $aa + ac\sqrt{d} + ab\sqrt{c} + bc\sqrt{d}$ per la grandezza complessa $a + c\sqrt{d}$, scrivesi 'l divisore sotto al dividendo, e si fa la divisione al solito; così 'l termine aa diviso per a dà a, e moltiplicando il quoziente a per i termini del divisore, dico: a per a dà aa, tolgo aa da aa, e null' avanza; a per $c\sqrt{d}$ dà $ac\sqrt{d}$, e togliendo $ac\sqrt{d}$ da $ac\sqrt{d}$, nulla resta.

$$\frac{aa + ac\sqrt{d} + ab\sqrt{c} + bc\sqrt{d}\ (a + b\sqrt{c}}{a + c\sqrt{d}}$$

$$\frac{a + c\sqrt{d}}{o \quad o}$$

Scrivo 'l divisore sotto gli altri caratteri del dividendo, e trovo che la grandezza $ab\sqrt{c}$ divisa per a dà al quoziente $b\sqrt{c}$, e moltiplicando detto quoziente per lo divisore, indi facendo la sottrazione, null' avanza; così 'l quoziente è $a + b\sqrt{c}$, e ciò serve di prova alla prima moltiplicazione composta (*N.* 151.).

Per dividere la grandezza complessa $aa - bbd$ per $a - b\sqrt{d}$, osservo, che nel secondo termine bbd del dividendo la grandezza d è simile a $\sqrt{dd}$, e in conseguenza, che bbd è uguale a $bb\sqrt{dd}$; così, in vece del dividendo $aa - bbd$, scrivo $aa - bb\sqrt{dd}$ con sotto il divisore; e dico: il termine aa diviso per a dà 'l quoziente a; moltiplico a per a, e sottratto 'l prodot-

$$\frac{aa - bb\sqrt{dd}\ (a + b\sqrt{d}}{a - b\sqrt{d}}$$

$$\frac{+ab\sqrt{d} - bb\sqrt{dd}}{a - b\sqrt{d}}$$

$$o \quad o$$

to da aa, nulla resta; moltiplico a per $-b\sqrt{d}$, il che fa $-ab\sqrt{d}$: ma siccome non v'è alcun termine nel dividendo, che contenga 'l prodotto $-ab\sqrt{d}$, così vi suppongo $-ab\sqrt{d}+ab\sqrt{d}$, il che ne l'accresce, ne lo diminuisce; e da $-ab\sqrt{d}$ sottratto $-ab\sqrt{d}$, niente resta. Scrivo $+ab\sqrt{d}$ di sotto, ed abbassando 'l termine $-bb\sqrt{dd}$, vi scrivo sotto 'l divisore. $ab\sqrt{d}$ diviso per a dà $b\sqrt{d}$ al quoziente, e moltiplicando questo quoziente pel divisore, indi facendone la sottrazione, null'avanza; il quoziente adunque è $a+b\sqrt{d}$, e ciò serve di prova alla seconda moltiplicazione (*N.* 151.).

Che se operando in tal maniera la divisione non fosse esatta, converrebbe scriver il dividendo sotto al divisore a guisa di frazione. (*a*)

Del Calcolo degli Esponenti.

153. *Il Calcolo degli Esponenti* altro non è che moltiplicare una potenza d'una grandezza per un'altra potenza della stessa grandezza, dividere l'una per l'altra, innalzare una potenza di detta grandezza ad un'altra potenza, od estrarne la radice per mezzo de' soli esponenti; ed eccone le regole.

154. Sia

(a) Nota. *Il calcolo delle radici immaginarie si fa nello stesso modo che quello delle reali: si metta per altro attenzione all'esempio seguente, affine di sapere, come i segni si debbano maneggiare.*

Moltiplica

$$
\begin{array}{rrr}
+1\sqrt{-8} & +1\sqrt{-2} & \\
+1\sqrt{-8} & -1\sqrt{-2} & \\
\hline
-8 & -4 & \\
 & +4 & +2 \\
\hline
 & -6 &
\end{array}
$$

Cioè $\sqrt{-8}$ in $\sqrt{-8} = -8$

$\sqrt{-8}.\ \sqrt{-2} = \sqrt{-16} = -4$

$+\sqrt{-8}. - \sqrt{-2} = -1.\sqrt{-16} = -1. -4 = 4$

$+\sqrt{-2}. - \sqrt{+2} = -1.\sqrt{-4} = -1. -2 = 2$

E così in tutti gli altri casi.

154. Sia la grandezza a, od a^1, le cui potenze sono a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, ec. se si vuole moltiplicare la potenza a^2 per la potenza a^3, s'aggiugne l' esponente 2 all' esponente 3, e la somma 5 è l'esponente della potenza prodotta dalle potenze 2 e 3: così essa sarà a^5, poichè la potenza da moltiplicarsi a^2 è uguale ad aa, e'l moltiplicator a^3 è uguale ad aaa : ma per moltiplicare aa per aaa, si dee scriver a^5; onde'l prodotto a^2 per a^3 è veramente la potenza a^5, il cui esponente 5 è la somma degli esponenti 2 e 3. Similmente, per moltiplicare a^3 per a^4, aggiugnesi l'esponente 3 all'esponente 4, il che fa 7, e si ha'l prodotto a^7 ; giacchè a^3 per a^4 è uguale ad aaa per $aaaa$, il che da $aaaaaaa$, od a^7.

155. Per dividere una potenza della grandezza a per un' altra potenza della stessa grandezza, levasi l'esponente del divisore dall' esponente del dividendo; e'l residuo è l'esponente del quoziente.

Per dividere a^6 per a^2, togliesi l'esponente 2 dall' esponente 6, e'l quoziente è a^4; perocchè a^6 è uguale ad $aaaaaa$, e a^2 è uguale ad aa: ora, per dividere $aaaaaa$ per aa, scrivesi $aaaa$, ch'è uguale ad a^4; onde'l quoziente di a^6 diviso per a^2 è a^4, il cui esponente 4 è'l residuo della sottrazione de'due esponenti.

156. Per innalzare una data potenza di a ad un'altra potenza, il cui esponente sia dato, si moltiplica l' esponente della data potenza pel dato esponente ; e'l prodotto è l'esponente della potenza ricercata.

Per innalzare adunque la potenza a^3 al quadrato, si moltiplica l'esponente 3 per l'esponente 2 del quadro, o della seconda potenza, il che fa 6, ed a^6 è'l quadro di a^3, imperocch' essendo a^3 uguale ad aaa, se si moltiplica la potenza aaa in se stessa, s' avrà la potenza $aaaaaa$ uguale ad a^6. Similmente, per innalzare la potenza a^2 alla sua quarta, si moltiplica 2 per l' esponente 4 della quarta potenza, il che fa 8, e scrivesi a^8 per prodotto, perciocchè la potenza aa moltiplicata in se stessa dà la seconda potenza $aaaa$ di aa, la seconda moltiplicata per aa dà la terza potenza $aaaaaa$, e finalmente la terza moltiplicata per aa dà la quarta potenza $aaaaaaaa$, od a^8 di aa, od a^2.

157. Per estrarre dalla grandezza a la radice d'una potenza, dividesi l'esponente della potenza per l'esponente della radice; e'l quoziente è l'esponente della radice cercata.

Onde per estrarre la radice seconda da a^6, dividesi 6 per 2, ed a^3 è la radice ricercata; imperocchè, se per innalzare a^3 alla seconda potenza è necessario (per la regola antidetta) moltiplicare l'

 espo-

esponente 3 per l'esponente 2 della potenza, a cui si vuole innalzar a^3, il che dà l'esponente 6 della seconda potenza a^6 di a^3; è evidente, che per estrarne la radice quadrata converrà divider 6 per 2, ed a^3 sarà la radice quadra di a^6.

158. Per lo che si vede, ch'operando per mezzo degli esponenti si fanno con l'addizione e la sottrazione quell'operazioni, che si farebbero col moltiplicare, e col dividere; e con la moltiplicazione e la divisione si fanno quelle, che si farebbero coll'innalzare a diverse potenze, o coll'estrarne le radici.

159. Quindi ne segue, che se dividesi a per a, cioè a^1 per a^1, s'avrà a^{1-1}, od a^0 (*N.* 155.) : ora, la grandezza a divisa per a dà 1 al quoziente; onde a^0 è uguale ad 1, il che si dee notare.

160. Indi ancora ne segue, che se dividesi a^0 per a^1 s'avrà a^{0-1}; e se si divide a^0 per a^2 s'avrà a^{0-2}, cioè a^{-2}: similmente, dividendo a^0 per a^3, s'avrà a^{0-3}, od a^{-3}, e così a mano a mano; il che darebbe le potenze negative di a, le quali sarebbero a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, ec. talmente che a^0 sarebbe fra le potenze positive, e le negative di a, come quì sotto si può vedere.

$$a^{-\infty}\ ,\ \text{ec.}\ a^{-5}.a^{-4}.a^{-3}.a^{-2}.a^{-1}.a^0.a^1.a^2.a^3.a^4.a^5,\ \text{ec.}\ a^{\infty}$$

La grandezza a^{∞} significa la grandezza a innalzata ad una potenza infinita, o sia la grandezza a^{∞} uguale ad una potenza infinitamente grande; e la potenza $a^{-\infty}$ significa la grandezza a^0 divisa per a^{∞}, il che dà la potenza negativa $a^{0-\infty}$ uguale ad una potenza infinitamente picciola; perocchè essendo a^0 uguale ad 1, è manifesto, che 1 diviso per una grandezza infinita a^{∞} darebbe un quoziente infinitamente picciolo.

161. Le potenze negative possono talmente esprimersi, che i loro esponenti divengano positivi; perciocchè essendo a^0 uguale ad 1, se dividesi al solito 1 per a^1, s'avrà $\frac{1}{a^1}$ uguale ad a^{-1}. Similmente, se dividesi 1 per a^2, s'avrà $\frac{1}{a^2}$ uguale ad a^{-2}, e così dell'altre; sicchè le potenze negative a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, ec. si cangierano in $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ ec. i cui esponenti sono positivi; e ciò si fa, com'è facile il vedere, facendo passare ciascuna potenza negativa al denominatore d'una frazione, il cui numerator sia 1, e dando a questo denominatore un' esponente positivo, in vece del negativo.

162. Siccome le potenze negative di a possono divenir positive passando al denominatore d'una frazione, il cui numerator sia 1; così anche le positive possono divenir negative passando al denomi-

minator d' una frazione, il cui esponente sia 1; e però le potenze a^{1}, a^{2}, a^{3}, a^{4}, ec. possono cangiarsi nelle sue simili $\frac{1}{a^{-1}}$, $\frac{1}{a^{-2}}$, $\frac{1}{a^{-3}}$, ec. il che io provo così: se per fare la divisione di a^{0} per la potenza negativa a^{-1} mi servo del calcolo degli esponenti, debbo sottrarre l'esponente negativo di a^{-1} dall' esponente 0 di a^{0} (*N* 155.): ma sottrar -1 egli è dare 1; onde il residuo della sottrazione dee esser $0 + 1$, od 1; e per conseguenza il quoziente della divisione dee esser a^{1}: ora, essendo a^{0} uguale ad 1, è manifesto, che dividendo 1 per a^{-1}, il quoziente è $\frac{1}{a^{-1}}$; dunque 'l quoziente a^{1} è uguale al quoziente $\frac{1}{a^{-1}}$; e ciò servirà ancora per dimostrare che a^{2} è uguale ad $\frac{1}{a^{-2}}$, ec.

163. Le cose dette suppongono, che le potenze positive, o negative non abbiano altri coefficienti che l' unità: che se altri ne avessero, dovrebbono gli stessi restare al numerator, finchè le potenze passassero al denominatore; così per rendere positiva la potenza $2a^{-1}$, si lascierebb' il coeficiente al numeratore, e scriverebbesi $\frac{2}{a^{1}}$, perciocchè $\frac{2}{a^{1}}$, è uguale a $2 \times a^{-1}$: ora, a^{-1} è uguale ad $\frac{1}{a^{1}}$; onde $2 \times a^{-1}$ è uguale a $2 \times \frac{1}{a^{1}}$, o $\frac{2}{a^{1}}$. Similmente, per rendere negativa la potenza $2a^{2}$, scriverebbesi $\frac{2}{a^{-2}}$ a cagione che $2a^{2}$ è uguale a $2 \times a^{2}$: ma a^{2} è uguale ad $\frac{1}{a^{-2}}$: onde $2 \times a^{2}$ è uguale a $\frac{2}{a^{-2}}$ ec.

164. Finalmente, dalle regole date ne segue, che per avere la radice quadrata, o cuba, ec. di a, conviene scriver $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, ec. e in conseguenza si può far di meno de' segni radicali $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ec. Così ancora, per estrarre la radice quinta da a^{4}, si scriverà $a^{\frac{4}{5}}$; per estrarre la settima da a^{2}, si scriverà $a^{\frac{2}{7}}$ ec.

165. Questo calcolo è comodo, non tanto perchè toglie i segni radicali, quanto perchè per esso rendesi fattibile la moltiplicazione delle potenze di differente spezie; imperocchè, per moltiplicare $a^{\frac{1}{2}}$ per $a^{\frac{1}{3}}$, si scriverà $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$; ovvero, riducendo le due frazioni

al

al medesimo denominatore, e sommandole insieme, s'avrà $a^{\frac{5}{6}}$; il che significa, che queste due radici moltiplicate l'una per l'altra danno la radice sesta della potenza 5 della grandezza a, ec.

Del Calcolo degli esponenti delle potenze de' moltinomj.

166. Talvolta succede, ch'in vece d'innalzare un moltinomio alle sue diverse potenze, non si fà, scritto che sia, che tirargli sopra una linea, la quale abbraccj tutt'i termini, e a destra della stessa si colloca un numero esprimente la potenza, a cui dee esser innalzato il moltinomio: così, in vece delle potenze de' binomj $a+b$, scrivesi $\overline{a+b}^{1}$ per denotare la prima potenza, o l'istesso binomio; $\overline{a+b}^{2}$ per denotare il quadrato; $\overline{a+b}^{3}$ per esprimere il cubo; $\overline{a+b}^{4}$ per esprimere la quarta potenza; e così dell'altre.

167. Se dunque esprimonsi le potenze d'un moltinomio nel modo accennato, è evidente, che si possono alle stesse applicare le regole del calcolo degli esponenti; per esempio, per moltiplicare la potenza $\overline{a+b}^{2}$ del binomio $a+b$ per la potenza $\overline{a+b}^{3}$ dello stesso binomio, si sommano insieme i due esponenti, e scrivesi $\overline{a+b}^{5}$. Per dividere la potenza $\overline{a+b}^{6}$ per la potenza $\overline{a+b}^{3}$, si toglie l'esponente 3 dall'esponente *6*, e scrivesi $\overline{a+b}^{3}$. Per innalzare la potenza $\overline{a+b}^{3}$ al suo quadrato, si moltiplica l'esponente 3 per l'esponente 2 della potenza, a cui si vuole innalzar $\overline{a+b}^{3}$, e scrivesi $\overline{a+b}^{6}$. Per estrarre la radice quadrata dalla potenza $\overline{a+b}^{6}$, si divide l'esponente *6* per l'esponente 2 della radice, e scrivesi $\overline{a+b}^{3}$.

Similmente, se dividesi la potenza $\overline{a+b}^{5}$ per se stessa, s'avrà $\overline{a+b}^{0}=1$; e se dividesi $\overline{a+b}^{0}$ per $\overline{a+b}^{1}$, s'avrà la potenza negativa $\overline{a+b}^{-1}$; finalmente, se si divide $\overline{a+b}^{0}$ per $\overline{a+b}^{2}$, s'avrà la potenza negativa $\overline{a+b}^{-2}$, ec.

Per rendere positiva la potenza negativa $\overline{a+b}^{-2}$, si scriverà $\frac{1}{\overline{a+b}^{2}}$, e in vece di $3 \times \overline{a+b}^{-1}$, si scriverà $\frac{3}{\overline{a+b}^{1}}$: ma s'avverta che 'l coef-

ficiente

ficiente 3 sia fuori della linea scritta sopra 'l moltinomio, perciocchè allora l'espressione significa la potenza 3 moltiplicata per la potenza negativa $\overline{a+b}^{-3}$ di $a+b$: che se 'l carattere fosse sotto la linea, come nella potenza $\overline{3a+b}^{-3}$, ciò significherebbe la potenza negativa $\overline{3a+b}^{-3}$ del binomio $3a+b$; e per rendere questa potenza positiva scriverebbesi $\frac{1}{\overline{3a+b}^{3}}$; quindi è, che per denotare che 'l coefficiente è fuori del segno, scrivesi sempre il segno × tra 'l coefficiente, e la grandezza, ch'è sotto 'l segno.

Per rendere negativa la potenza $\overline{a+b}^{2}$, scrivesi $\frac{1}{\overline{a+b}^{2}}$; e per rendere negativa la potenza $4\times\overline{a+b}^{3}$, scrivesi $\frac{4}{\overline{a+b}^{3}}$, ec.

Per esprimere la terza radice di $\overline{a+b}^{1}$, scrivesi $\overline{a+b}^{\frac{1}{3}}$.

E per esprimere la quarta radice di $\overline{a+b}^{1}$, scrivesi $\overline{a+b}^{\frac{1}{4}}$.

Ora, chi vuole comprenderne la ragione pigli una grandezza x uguale ad $\overline{a+b}$; e le potenze di $a+b$ saranno x, x^2, x^3, x^4, x^5, ec. sopra le quali si potrà operare mediante 'l calcolo degli esponenti: ma dopo tutte quest'operazioni si potrà scriver $a+b$ in vece d' x; e si troverà quanto s'è detto.

168. Ecco le cose più essenziali da sapersi circa l'operazioni dell' Algebra. Passiamo ora a vedere qual sia l'uso, che ne fa l'Analisi per la risoluzione de' problemi numerici; che poi vedremo, come si applichi questo stesso calcolo ai problemi della Geometria.

CAPITOLO SESTO.

Dell' Analisi.

169. DUe sono i Metodi, co' quali si scopre la verità: l'un s' appella *Sintesi*, e l'altro *Analisi*.

170. La *Sintesi*, e altramente detta Metodo di *composizione*, comincia da' principj più semplici, e s'innoltra a grado a grado, sin che per essa si viene a conoscere quale sia l'oggetto della sua ricerca.

171.

171. L'*Analisi* al contrario suppone la cosa fatta, e discende a poco a poco esaminando tutte le conseguenze, che seguono da questa suppofizione, fin che per essa si viene chiaramente a scoprire la verità, che si ricerca.

172. Quindi si vede, che la sintesi e l'analisi sono differenti, incominciando l'una dalle cose particolari, e terminando alla composizione; e l'altra discendendo dalla composizione alle cose particolari.

173. Gli Antichi usavano la sintesi, e l'analisi, come facciam noi: ma siccome l'espressioni, ch' essi adoperavano, eran particolari, ed unicamente proprie per quelle questioni, che volevano risolvere; così di raro potevano dedurre dalla loro analisi le conseguenze generali, che presentemente si deducono, mediante l'uso, che Mr. Descartes c' insegnò a fare dell' espressioni, e de' caratteri.

174. Quantunque la sintesi e l'analisi pajano contrarie, nondimeno i loro principj sono gli stessi; e tanta è la semplicità dei medesimi, che leggendoli, resteremo maravigliati ch' abbiano potuto condurre alla scoperta di verità sì belle.

Principj, o Assiomi.

175. Il tutto è maggiore di qualunque sua parte, ed è uguale alla somma di esse.

176. Se una grandezza è perfettamente eguale ad un'altra, si può senza distinzione pigliar anzi l'una, che l'altra: se $a=b$, posso prender a in vece di b, e b in vece di a.

177. Se due grandezze non differiscono che d' una quantità infinitamente picciola, e che non si poss' assegnare, diconsi uguali.

178. E' impossibile, ch' una cosa nel medesimo tempo sia in un modo, e non sia.

179. Quelle grandezze, che sono uguali ad una terza, sono uguali anche fra loro: se $a=b$, e $c=b$; dunque $a=c$.

180. Se a grandezze uguali se n' aggiungono, o se ne tolgono di uguali, anche le somme, o i residui saranno grandezze uguali; e se alle stesse se n' aggiungono, o se tolgono di disuguali, le somme, o i residui saranno disuguali.

181. Se due grandezze uguali si moltiplicano, o dividonsi per grandezze uguali, i prodotti, o quozienti saranno uguali; e se le

le ſteſſe ſi moltiplicano, o dividonſi per grandezze diſuguali, i prodotti, o quozienti ſaranno diſuguali.

182. Se due grandezze ſono uguali, la metà, la terza, o la quarta parte di eſſe ſaranno grandezze uguali; ſiccome ancora ſaranno uguali quelle grandezze, che ſono doppie, triple, o quadruple delle ſteſſe; non meno che i quadrati, i cubi, o le terze potenze delle medeſime, e le loro radici ſeconda, terza, o quarta, ec.

Della Natura de' Problemi, e del modo di riſolverli con l' Analiſi.

183. Ne' Problemi, o queſtioni da riſolverſi vi ſono ſempre delle grandezze note, e dell'ignote: ſe tutto foſſe noto, non vi ſarebbe più queſtione; e ſe nulla ſi ſapeſſe, ſarebbe un proporre la Magia. Ora, non vi ſono ſe non gli Stregoni, o gl'Indovini, che poſſano ſcoprire una verità ſenz' alcuna preliminare notizia; e i Matematici non ſi vantano d' eſſere ne Stregoni, ne Indovini. Queſti Problemi adunque poſſono eſſer di due ſpezie; gli uni *determinati*, e gli altri *indeterminati*: i determinati ſon quelli, che non poſſono riſolverſi che in un ſol modo, ovvero in pochiſſimi; e gl' indeterminati quelli, che poſſon riſolverſi in più modi.

184. Ecco in che maniera ſi riſolvono i Problemi determinati. 1°. Segnanſi le grandezze ignote con l' ultime lettere dell' Alfabeto x, y, z, e le note con le prime a, b, c, d, ec. 2°. S' eſprimono tutte le condizioni del Problema, cioè ſi fanno tant' equazioni particolari, quante ſono le condizioni del Problema propoſto; perocchè ogni condizione d' un Problema, come ſi vedrà in progreſſo, è un' equazione. 3°. Se vi ſono molte grandezze ignote, pigliaſi, mediante l' equazioni formate, il valore d' una di eſſe, e ſi ſoſtituiſce il valore di queſt' ignota in un' altr' equazione, il che la fa ſvanire; e ſi fa 'l ſimile col reſto dell' ignote, ſe altre ve ne ſono. 4°. Quando non vi reſta più d' un' ignota, ciò ſuppoſto poſſibile, il Problema è determinato; ed allora (ſiccome la ſteſſa trovaſi in uno, e ſovente ancora in tutti due i membri meſcolata con grandezze note) ſi procura di fare, che in un membro dell'equazione non vi ſia ch' eſſa, e che nell' altro non vi ſieno che le ſole grandezze note; ed ecco riſoluto il Problema, poichè: l' ignota, che ſi trova uguale ad una, o più grandezze note, diventa nota. Ora, tutta la difficoltà conſiſte in fare, che la grandezza ignota ri-

manga sola in un membro; il che si dice *liberare l'ignota*, come fra poco si vedrà.

Che se ciò rendes' impossibile, ovvero se vi restano più grandezze ignote, il Problema è indeterminato, e si dovrà risolverlo, come a suo tempo vedremo: ma per meglio intendere le cose, che hanno relazione a' detti Problemi, porteremo due esempj, l' uno de' quali servirà ai Problemi determinati, e l'altro agl' indeterminati.

PROBLEMA DETERMINATO. *Si propone di dividere il numero 24 in due parti, di cui l'una sia'l triplo dell'altra; quali sono queste parti?*

Chiamo a il numero 24, x la prima parte, ed y la seconda, perchè queste due parti sono ignote; ora, le condizioni del Problema son due: la prima, che l' uno de' numeri ignoti sia'l triplo dell'altro; e la seconda, che la somma de' due numeri sia uguale a 24. Per soddisfare alla prima, dico: $x = 3y$; e per soddisfare alla seconda, dico: $x + y = a$; ma x è uguale a $3y$, e però nell'equazione $x + y = a$ posso metter $3y$ in vece d' x (*N.* 176.); onde $3y + y = a$: abbrevio l'espressione, ed ho $4y = a$; così'l Problema è determinato, perchè rimane una sola ignota: ma non essendo essa sola nel primo membro dell'equazione, perciocchè è moltiplicata per 4, la libero, dicendo: la grandezza $4y$ è uguale ad a; onde, dividendo queste due grandezze per 4, i quozienti saranno uguali (*N.* 180.), e la grandezza y sarà sola nel primo membro; poichè la divisione per 4 annullerà ciò, che ha fatto la moltiplicazione per 4: così io avrò $y = \frac{1}{4}a$, od $y = \frac{a}{4}$, e 'l Problema sarà risoluto; poichè mettendo 24, in vece di a, avrò $y = \frac{24}{4}$, od $y = 6$, e $3y$ od $x = 3 \times 6$ o sia 18. Dunque i due numeri ricercati sono 6 e 18, la cui somma è 24, e di cui l' uno, cioè 18, è triplo dell'altro, cioè 6.

PROBLEMA INDETERMINATO. *Due uomini han diviso fra loro una somma di scudi, e la parte d' uno di essi è'l triplo della parte dell'altro; quali sono queste due parti?*

Chiamo x la parte maggiore, y la minore, e z la lor somma: ora, per una condizione del Problema, ho $x = 3y$, e per l'altra, ho $x + y = z$; ponendo adunque $3y$, in vece d' x, in quest' ultima equazione, ho $3y + y = z$, ovvero $4y = z$: ma operando in tal maniera ho soddisfatto a tutte le condizioni del Problema, e tuttavia non m' è riuscito di poter fare, che rimanga una sola ignota; onde il Problema è indeterminato, cioè si può risolvere in infiniti mo-

ti mo-

ti modi; e in fatti, se voglio rispondere alla proposta questione, piglio per y un numero ad arbitrio, per esempio 2, e 'l moltiplico per 4, il che mi darà $8 = 4y$, e in consegnenza $8 = z$; cioè 8 sarà la somma ricercata, ed x, essendo uguale a $3y$, sarà uguale a 3×2, o 6: così le due parti saranno 6 e 2, la cui somma è 8, e di cui la prima è 'l triplo della seconda.

Ora, questo Problema è indeterminato, essendovi espressa una condizione di meno che nel precedente, in cui sapevasi, che la somma delle due parti era uguale a 24; per la qual cosa le dette due parti erano determinate da per se, e però non si poteva determinarne una ad arbitrio: ma mancando questa condizione al secondo Problema, s'ha dovuto necessariamente delle due grandezze deminarne una, per avere una somma determinata, non essendovi alcun numero, ch'aggiunto al suo triplo non faccia una somma totale; dal che ne segue, che dando ad una delle grandezze ora il valor di 2, ora quello di 3, o quello di 4, ec. s' avranno tante differenti risoluzioni del medesimo Problema.

E però quegli, che non conoscono perfettamente la natura de' Problemi indeterminati, proponendo simili Problemi, s' ingannano, pensando che non si sappia risolverli, se non risolvonsi, com' essi vogliono. Per esempio, se avessi risoluto l' accennato Problema, dicendo: che la prima parte è 6, la seconda 2, e la lor somma 8; e ch'alcuno (immaginatosi che la prima parte sia 9, e la seconda 3, il che fa la somma 12) mi dicesse, che questa risoluzione non è buona, s'ingannerebbe; non avvertendo, che potendosi 'l Problema risolvere in varj ed infiniti modi la mia risoluzione sarebbe sì buona che la sua; non potendo io fra tanti numeri (che possono corrispondere alla questione) trovar a caso quei, ch' egli ha scelto piuttosto ch'altri.

Come si faccia svanire un' ignota, che sia sola in un' Equazione.

186. Un' ignota si fa svanire o col sommare, o col sottrarre, o col moltiplicare, o col dividere, o coll' innalzare a qualche potenza, o coll' estrar qualche radice; e talvolta con due, o più di quest' operazioni, come si vedrà nelle seguenti regole.

187. Si fa svanire un' ignota col *sommare*, quando trovandosi quest' ignota in un sol membro d' un' equazione è sommata ad una grandezza nota negativa; perocchè allora, aggiugnendo all' uno e

O 2. all'

all'altro membro la grandezza nota col ſegno $+$, ſi troverà, che l'ignota rimane ſola nel membro, in cui era. Per fare ſvanir nell' equazione $x-a=b$ l'ignota x, s'aggiugne a ad amendue i membri, il che non altera la loro uguaglianza (*N.* 180.), e s' ha $x-a+a=b+a$; e perciocchè nel primo membro le grandezze $-a+a$ ſcambievolmente ſi tolgono, l'equazione ſi riduce ad $x=b+a$, in cui la grandezza x trovandoſi ſola in un membro è in conſeguenza uguale alla ſomma $b+a$ delle grandezze note b, a.

188. Si fa ſvanire un'ignota col *ſottrarre*, quando trovandoſi queſt'ignota in un ſol membro è ſommata ad una grandezza nota poſitiva; perocchè allora, aggiugnendo all'uno e all'altro membro la grandezza nota col ſegno $-$, ſi troverà, che l'ignota x rimane ſola nel ſuo membro. Così, per fare ſvanir nell'equazione $x+a=b$ l'ignota x, s'aggiugne ad entrambi i membri la grandezza $-a$, il che fa $x+a-a=b-a$: ma nel primo membro le grandezze $+a-a$ ſcambievolmente ſi tolgono; dunque 'l reſiduo è $x=b-a$.

189. AVVERTIMENTO. Queſte due regole ſervono a far vedere, che ſe in un'equazione ſi fa paſſare una grandezza dall'uno all'altro membro col ſegno contrario, ſuſſiſterà ancora l'uguaglianza fra i ſuoi due membri; perocchè nell'equazione $x-a=b$ aggiugnendo a a tutti due i membri, s'ha avuto l'equazione $x=b+a$, in cui la grandezza a è paſſata nel ſecondo membro col ſegno $+$, quando eſſa era nel primo col ſegno $-$: ſimilmente, nell' equazione $x+a=b$ ſottraendo da tutti due i membri la grandezza $-a$, s'ha avuto l'equazione $x=b-a$, in cui la grandezza a è paſſata nel ſecondo membro col ſegno $-$, quando eſſa era nel primo col ſegno $+$.

190. Si fa ſvanire l'ignota col *moltiplicare*, quando trovandoſi la medeſima in un ſol membro dell'equazione è diviſa da grandezze note; perocchè allora, moltiplicando ambedue i membri pel diviſore, ſi troverà, che l'ignota rimane ſola nel membro, in cui era. Così, per fare ſvanir nell'equazione $\frac{x}{a}=b$ l'ignota x, ſi moltiplicano i due membri per a, il che dà $\frac{ax}{a}=ab$, e abbreviando l'eſpreſſione ſi ha $x=ab$. Similmente, per fare ſvanir nell'equazione $\frac{x}{a+b}=c$ l'ignota x, ſi moltiplicano entramb'i membri per $a+b$,

$a+b$, e si ha $\frac{ax+bx}{a+b}=ac+bc$; e abbreviando l' espressione si ha $x=ac+bc$.

191. Si fa isvanire l' ignota col *dividere*, quando essendo la stessa in un sol membro trovasi moltiplicata per grandezze note; perocchè allora, dividendo l' uno e l' altro membro pel moltiplicatore, si troverà, che l' ignota rimane sola nel membro, in cui era. Così, per far isvanire nell' equazione $ax=b$ l' ignota x, dividonsi i due membri per a, e si ha $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$, ovvero $x=\frac{b}{a}$. Similmente, per fare svanir nell' equazione $ax+bx=c$ l' ignota x, dividonsi ambedue i membri per $a+b$, giacchè il primo termine ax del primo membro è l' ignota x moltiplicata per a, e 'l secondo è x moltiplicata per b; e si ha $\frac{ax+bx}{a+b}=\frac{c}{a+b}$, od $x=\frac{c}{a+b}$.

192. AVVERTIMENTO. S' osservi, che quando tutt' i termini d' un' espressione complessa contengono una medesima grandezza, è segno, che la stessa è stata moltiplicata per tutt' i termini della detta espressione: per esempio, l' espressione $ax+bx+cx+dx$, la quale in tutt' i suoi termini contiene la grandezza x, denota, che la stessa è stata moltiplicata per $a+b+c+d$; e in conseguenza, se si dividesse quest' espressione per $a+b+c+d$, il quoziente sarebbe x. Similmente, l' espressione $aax+cdx-bbx$ denota, che la grandezza x è stata moltiplicata per $aa+cd-bb$; e però, se si dividesse l' espressione $aax+cdx-bbx$ per $aa+cd-bb$, il quoziente sarebbe x. Così ancora, l' espressione $ax+bx-cx+x$ denota, che la grandezza x è stata moltiplicata per $a+b-c+1$, a cagione che 'l coeficiente dell' ultimo termine x è 1, perocchè x è uguale ad $1x$; onde, dividendo $ax+bx-cx+x$ per $a+b-c+1$, s' avrà x per quoziente.

193. Si fa svanire l' ignota coll' innalzarla a qualche potenza, quando essa trovasi in un sol membro dell' equazione, e sotto ad un segno radicale; imperocchè allora s' innalzano ambedue i membri alla potenza espressa dall' esponente della radice. Per fare svanir x nell' equazione $\sqrt{x}=a$, s' innalzano amendue i membri al quadrato, e si ha $x=a^2$ (N. 182.); perocchè $\sqrt{x}$ per $\sqrt{x}$ dà x, a cagione che la radice moltiplicata in se stessa dà di prodotto il quadrato. Così, per fare svanir nell' equazione $\sqrt[3]{x}=b$ l' ignota x, s' innalzano i due membri al cubo, e si ha $x=b^3$; perciocchè

ciocchè $\sqrt[3]{x}$ per $\sqrt[3]{x}$ dà $\sqrt[3]{xx}$; e $\sqrt[3]{xx}$ per $\sqrt[3]{x}$ dà $\sqrt[3]{x^3}$, od x .

194. Si fa svanire l'ignota coll'estrar una radice , quando essa , nel membro in cui è, trovasi innalzata a qualche potenza ; imperocchè allora s'estrae da entramb'i membri la radice della potenza, a cui è innalzata l'ignota . Così , per far isvanire nell'equazione $x^3 = a^3$ l'ignota x , s'estrae la radice cuba dai due membri , e si ha $x = a$; similmente, per fare svanir nell'equazione $x^4 = abcc$ l'ignota x , s'estrae dall'uno e dall'altro membro la quarta radice , e si ha $x = \sqrt[4]{abcc}$; e così dell'altre.

195. Finalmente, si fa svanire l'ignota mettendo in pratica due , o più di queste regole, come gli esempj lo manifesteranno.

Per fare svanir nell'equazione $ax = bx + cd$ l'ignota x , si fa passar la grandezza bx dal secondo membro nel primo , aggiugnendo $-bx$ ad entramb'i membri, ovvero cangiando il segno $+$ in $-$, e si ha $ax - bx = cd$; poi si divide per $a - b$, e si ha $x = \frac{cd}{a-b}$.

Così ancora, per fare svanir nell'equazione $dx = x + ab$ l'ignota x , si fa passar la grandezza x , od $1x$ dal secondo membro nel primo , e si ha $dx - 1x = ab$; poi dividonsi i due membri per $d - 1$, e si ha $x = \frac{ab}{d-1}$.

Similmente , nell'equazione $ax + dx + cb = af$ si fa passar cb dal primo nel secondo membro , e si ha $ax + dx = af - cb$; poi dividonsi i due membri per $a + d$, e si ha $x = \frac{af-cb}{a+d}$.

Così nell'equazione $\frac{a\sqrt{x}+d\sqrt{x}}{a+b} = c$, moltiplico entrambi i membri per $a + b$, ed ho l'equazione $a\sqrt{x} + d\sqrt{x} = ac + bc$; poi li divido per $a + d$, e'l quoziente è $\sqrt{x} = \frac{ac+bc}{a+d}$; finalmente gl'innalzo al quadrato , ed ho l'equazione $x = \frac{aacc+2accb+bbcc}{aa+2ad+dd}$.

Così pure nell'equazione $\frac{a\sqrt{x}}{b} - \frac{d\sqrt{x}}{c} = f$, riduconsi le due frazioni del primo membro ad un'istesso denominatore , e si ha $\frac{ac\sqrt{x}-db\sqrt{x}}{bc} = f$; poi si moltiplicano entramb'i membri per bc , e'l prodotto è $ac\sqrt{x} - db\sqrt{x} = fbc$; indi tutto si divide per $ac - db$; e'l

e'l quoziente è $\sqrt{x} = \frac{fbc}{ac-db}$; finalmente tutto s'innalza al quadrato, e si ha $x = \frac{ffbbcc}{aacc - 2acdb + ddbb}$; e così dell'altre.

Esempj di Problemi determinati.

I. ESEMPIO. *Fu fatto a tre Uficiali un regalo: quello del secondo è doppio di quello del primo, più 6 lire; quello del terzo è triplo di quello del primo, meno 2 lire; e la summa totale è 304 lire.*

Chiamo a la somma totale, ed x il regalo del primo, perchè m'è ignoto: ora, per la prima condizione del Problema, il regalo del secondo è $2x + 6$; e per la seconda, quello del terzo è $3x - 2$: ma per la terza condizione la somma de' tre regali è uguale alla grandezza a; onde io ho l'equazione $x + 2x + 6 + 3x - 2 = a$, e abbreviando l'espressione ho $6x + 4 = a$: faccio passar 4 dal primo nel secondo membro, ed ho l'equazione $6x = a - 4$; finalmente, dividendo per 6, l'equazione è $x = \frac{a-4}{6}$, e dando ad a il suo valore ho $x = \frac{304-4}{6} = \frac{300}{6} = 50$: così'l regalo del primo è 50, e ponendo questo valore nell'espressioni $2x + 6$ e $3x - 2$ del regalo del secondo e di quello del terzo, s' avrà $2x + 6 = 2x \times 50 + 6 = 100 + 6 = 106$, ch' è il regalo fatto al secondo, e $3x - 2 = 3 \times 50 - 2 = 150 - 2 = 148$, ch'è il regalo fatto al terzo; ed in fatti i tre numeri 50, 106 e 148 fanno la somma 304.

II. ESEMPIO. *Un Bombardiere dice all'altro: se tu avessi tirato cinque bombe di meno, ed io cinque di più, avrei tirato il doppio di bombe di te; e se tu n' avessi tirate tre di più, ed io tre di meno, n'avrei tirate al pari di te; si ricerca quante bombe ha tirate l'un, e quante l'altro?*

Chiamo x le bombe tirate dal primo, ed y quelle tirate dal secondo; ora, per la prima condizione del Problema, il numero delle bombe tirate dal primo, più cinque, è'l doppio del numero delle bombe tirate dal secondo, meno cinque: così $x + 5$ è'l doppio di $y - 5$; e però, moltiplicando $y - 5$ per 2, il che fa $2y - 10$, s'ha $x + 5 = 2y - 10$, ch' è la prima equazione.

Ma

Ma per la seconda condizione del Problema, il numero delle bombe tirate dal primo, meno 3, è uguale al numero delle bombe tirate dal secondo, più tre; onde io ho la seconda equazione $x - 3 = y + 3$.

$$x + 5 = 2y - 10 \; \ldots\ldots \text{prima Equazione}$$
$$x - 3 = y + 3 \; \ldots\ldots \text{seconda Equazione}$$
$$x = 2y - 15 \; \ldots\ldots \text{primo valore di } x$$
$$x = y + 6 \; \ldots \text{secondo valore.}$$
$$2y - 15 = y + 6$$
$$y - 15 = 6$$
$$x = 21 + 6 = 27.$$

Libero nella prima equazione l' ignota x, ed ho $x = 2y - 15$. Libero similmente x nella seconda, ed ho $x = y + 6$; così io ho due valori di x, e in conseguenza essi sono fra loro uguali.

Faccio degli stessi un'equazione, ed ho $2y - 15 = y + 6$: Faccio passar y dal secondo membro nel primo, ed ho $y - 15 = 6$; e facendo passar 15 dal primo nel secondo ho $y = 21$.

Pongo questo valore di y nel valore $y + 6$ d'x, ed ho $x = 21 + 6 = 27$: così 'l primo ha tirato 27 bombe, e l' altro 21; e in fatti, se aggiungo 5 al primo, il che fa 32, e levo 5 al secondo, ciò che mi dà 16, è evidente, che 32 è il doppio di 16; e se tolgo 3 dal primo, il che mi dà 24, e aggiungo 3 al secondo, il che fa parimente 24, è manifesto, che i due numeri saranno uguali.

198. III. ESEMPIO. *Tre uomini hanno speso del denaro: i due primi hanno speso insieme cinque lire più del terzo, il primo e'l terzo ne hanno spese insieme 15 più del secondo, e i due ultimi ne hanno spese insieme 25 più del primo; si ricerca qual sia la somma totale, e quale la spesa d'ognuno in particolare?*

Chiamo a l' eccesso 5 de' due primi sopra 'l terzo; b l' eccesso 15 del primo e del terzo sopra 'l secondo; c l' eccesso 25 de' due ultimi sopra 'l primo; x la spesa del primo; y quella del secondo; e z quella del terzo.

Ora, per la prima condizione, se 'l terzo avesse speso 5 lire di più, la sua spesa sarebbe stata uguale a ciò, che ha speso il primo in compagnia del secondo; onde io ho questa prima equazione $x + y = z + a$; e trovo nella stessa maniera, che la seconda equazione è $x + z = y + b$, e che la terza è $z + y = x + c$.

Giungo insieme queste tre equazioni facendo due somme; l' una de' primi tre membri, e l' altra de' tre secondi, il che mi dà $2x + 2y + 2z = a + b + c + z + y + x$; e facendo pas-

passare $x + y + z$ dal secondo membro nel primo, ho $x + y + z = a + b + c$; e però la somma delle tre spese, o sia la spesa totale è uguale alla somma dei tre eccessi $a + b + c$.

$$x + y = z + a \text{.... prima Equazione.}$$
$$x + z = y + b \text{.... seconda Equazione}$$
$$z + y = x + c \text{....terza Equazione.}$$
$$2x + 2y + 2z = a + b + c + z + y + x.$$
$$x + y + z = a + b + c$$
$$x + y + z = S \text{ .... Spesa totale}$$

Per brevità, suppongo $a + b + c = S$, e in conseguenza l' equazione della spesa totale è $x + y + z = S$; ora per trovare la spesa del primo, libero in quest'equazione l'ignota x, facendo passare $y + z$ nel secondo membro, ed ho $x = S - y - z$: ma per la terza equazione delle prime tre ho $z + y = x + c$; onde $- z - y = - x - c$; e però mettendo $- x - c$, in vece di $- z - y$, nell' equazione $x = S - y - z$, ho $x = S - x - c$; e facendo passar x dal secondo membro nel primo, ho $2x = S - c$; finalmente, dividendo tutto per 2, ho l'equazione $x = \frac{1}{2} S - \frac{1}{2} c$, ch'è la spesa del primo.

$$x = S - y - z$$
$$x = S - x - c$$
$$2x = S - c$$
$$x = \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}c \text{ .... Spesa del primo}$$

$$y = S - x - z$$
$$y = S - y - b$$
$$2y = S - b$$
$$y = \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}b \text{ .... Spesa del secondo}$$

$$z = S - x - y$$
$$z = S - z - a$$
$$2z = S - a$$
$$z = \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}a \text{ .... Spesa del terzo.}$$

Per trovare quella del secondo, piglio ancora l' equazione $x + y + z = S$ della spesa totale, e ne libero l'ignota y, il che mi dà $y = S - x - z$: ma per la seconda equazione delle prime tre ho $x - z = y + b$, ovvero $- x - z = - y - b$; mettendo adunque $- y - b$, in vece di $- x - z$, nell equazione $y = S - x - z$, ho $y = S - y - b$; e facendo passar y dal secondo membro nel primo, ho $2y = S - b$; finalmente, dividendo tutto per 2, ho l'equazione $y = \frac{1}{2} S - \frac{1}{2} b$, ch'è la spesa del secondo.

Per trovare quella del terzo, piglio, come sopra, l' equazione $x + y$

$x + y + z = S$ della ſpeſa totale, e liberandone l'ignota z, ho $z = S - x - y$: ma per la prima equazione delle tre prime ho $x + y = z + a$, ovvero $- x - y = - z - a$; mettendo adunque il valore $- z - a$ di $- x - y$ nell'equazione $z = S - x - y$, ho $z = \frac{1}{2}S - z - a$; e facendo paſſar z dal ſecondo membro nel primo, ho $2z = S - a$; finalmente divido tutto per 2, ed ho l'equazione $z = S - \frac{1}{2}a$, ch' è la ſpeſa del terzo.

Metto i valori delle lettere a, b, c nell'equazione della ſomma totale, e in quelle delle ſpeſe particolari; e trovo, che la ſpeſa totale è 45; che quella del primo è $22\frac{1}{2} - 12\frac{1}{2}$, cioè 10; che quella del ſecondo è $22\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}$, cioè 15; e che quella del terzo è $22\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}$, cioè 20; ed è manifeſto, che i tre numeri 10, 15, 20 corriſpondono perfettamente a tutte le condizioni del Problema, perocchè la ſomma 25 de'due primi ſupera'l terzo di 5; la ſomma 30 del primo e del terzo ſupera 'l ſecondo di 15, e la ſomma 35 de'due ultimi ſupera'l primo di 25; il che è ſecondo la propoſta fatta.

199. IV. ESEMPIO. *Due Soldati in una Battaglia hanno ucciſo* 80 *uomini, e uno di loro ne ha uccisi* 20 *più dell'altro; quanti ne ha uccisi ciaſcun d'eſſi?*

Chiamo a la ſomma 80, d la differenza 20, x il numero degli uomini uccisi dal primo, ch'io ſuppongo averne uccisi più dell' altro, e z il numero degli uomini uccisi dal ſecondo; onde $x + z = a$; e ſe dal maggiore tolgo'l minore, il reſiduo $x - z$ ſarà uguale alla differenza d, e in conſeguenza $x - z = d$.

Ho adunque due equazioni $x + z = a$, ed $x - z = d$; libero nella prima l'ignota x, ed ho $x = a - z$; ch'è il primo valore d'x.

Libero ſimilmente nella ſeconda l'ignota x, ed ho $x = d + z$, ch'è il ſecondo valore d'x.

$x + z = a$ . . . . . prima Equazione
$x = a - z$ . . primo valore di x
$x - z = d$ . . . . ſeconda Equazione
$x = d + z$ . . ſecondo valore di x

$a - z = d + z$.
$a - d = 2z$.
$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d = z$
$x = d + z = d + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$

Faccio un' equazione di queſti due valori, ed ho $a - z = d + z$; e facendo paſſar z dal primo nel ſecondo membro, e d dal ſecondo nel primo, ho $a - d = 2z$; finalmente, dividendo tutto per 2, ho l' equa-

equazione $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d = z$; il che significa, che'l numero minore è uguale alla metà della somma meno la metà della differenza.

Metto questo valor di z nel secondo valore d'x, ch'è $x = d + z$, ed ho l'equazione $x = d + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$; il che significa, che'l numero maggiore è uguale alla metà della somma più la metà della differenza.

Mettendo adunque i valori di a e di b, ho l' equazioni $z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = 40 - 10 = 30$, ed $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 40 + 10 = 50$; e però la somma de'due numeri 30 e 50 è uguale ad 80, e la lor differenza è 20; il ch' è secondo la proposta fatta.

Ora, siccome le lettere a e b possono esprimere qualunque numero, è manifesto, che la detta risoluzione è generale; e però se ne può dedurre la regola, o 'l Teorema seguente.

200. TEOREMA dedotto dall' Esempio testè riferito. *Data la somma di due grandezze e la lor differenza, la metà della somma più la metà della differenza è uguale alla maggiore; e la metà della somma meno la metà della differenza è uguale alla minore.*

201. E' manifesto, che se nella risoluzione de' Problemi mettonsi le lettere a, b, c, ec. in vece delle grandezze note, le risoluzioni saranno tanti Teoremi generali per casi simili, come si ha veduto; e questa è la differenza, che passa tra l'analisi moderna, e quella degli Antichi, i quali per mancanza d' espressioni generali, onde significare le grandezze note, e l' ignote, non sapevano trovare che risoluzioni proprie per quei dati casi, che voleano risolvere; per la qual cosa lor conveniva di ricominciare l' operazione, qualora le grandezze comprese in un Problema non erano precisamente simili a quelle comprese in un' altro della stessa spezie. Oltre di che spesso succede, ch' un Teorema scoperto con la nuova Analisi ci guida facilmente alla scoperta d'un'infinità di Problemi, che malagevolmente si risolverebbero senza questo soccorso; ciò che noi vedremo nell'esempio, che segue, in cui si metterà in opra il Teorema precedente.

202. ESEMPIO. *Due Giuocatori hanno guadagnato una certa somma di scudi: il guadagno del primo moltiplicato per quello del secondo fa 96, e se si fanno i quadrati de' due guadagni, la lor somma sarà 208; qual'è il guadagno dell' uno, e quello dell' altro?*

Siccome io non conosco ne la somma guadagnata, ne la differenza de' due guadagni; così chiamo $2x$ la somma guadagnata, e $2z$ la differenza de' due guadagni, servendomi di tali espressioni, per poter pigliare la metà della somma, e la metà della differen-

za, senza frazione. Chiamo in oltre a il prodotto 96 de' due guadagni, e b la somma 208 dei quadrati.

Ora, pel Teorema precedente, il guadagno fatto dal primo è $x + z$, e quello fatto dal secondo è $x - z$; ma per la prima condizione del Problema il prodotto di questi due guadagni moltiplicati insieme è uguale a 96 $= a$; onde il prodotto $xx - zz$ è uguale ad a.

Faccio i quadrati de' due guadagni, e la lor somma $2xx + 2zz$, per la seconda condizione del Problema, è uguale a 208 $= b$.

Per avere nella prima equazione il valore di xx, faccio passar zz nel secondo membro, ed ho $xx = a + zz$. Similmente, per avere nella seconda il valore di xx, faccio passar $2zz$ nel secondo membro, ed ho $2xx = b - 2zz$; finalmente, dividendo tutto per 2, ho l'equazione $xx = \frac{b}{2} - zz$.

$x + z$. Guadagno del primo.
$x - z$. Guadagno del secondo.

$xx + xz - zz$.
$- xz$

$xx - zz$. Prodotto de' due guadagni.
$xx - zz = a$ prima Equazione.
$xx + 2xz + zz$. Quadrato del primo guadagno
$xx - 2xz + zz$. Quadrato del secondo.

$2xx + 2zz = b$ seconda Equazione.
$xx = a + zz$ primo valore di xx.
$xx = \frac{b}{2} - zz$ secondo valore di xx.

$$a + zz = \frac{1}{2} b - zz.$$
$$2zz = \frac{1}{2} b - a$$
$$zz = \frac{b}{4} - \frac{1}{2} a$$
$z = \sqrt{\frac{b}{4} - \frac{1}{2} a}$ Guadagno del primo.
$$xx = a + \frac{b}{4} - \frac{1}{2} a = \frac{b}{4} + \frac{1}{2} a$$
$x = \sqrt{\frac{b}{4} + \frac{1}{2} a}$. Guadagno del secondo.

Faccio un' equazione de' due valori di xx, ed ho $a + zz = \frac{1}{2} b - zz$; faccio passar zz dal secondo membro nel primo, ed a dal primo nel secondo, ed ho $2zz = \frac{1}{2} b - a$; poi divido tutto per 2, ed ho $zz = \frac{b}{4} - \frac{1}{2} a$; finalmente n' estraggo da ambe le

parti

parti la radice quadrata , ed ho l'equazione $z = \sqrt{\frac{b}{4} - \frac{1}{2}a}$.

Metto 'l valore $\frac{b}{4} - \frac{1}{2}a$ di zz nel primo valore di xx, ch'è $xx = a + zz$, ed ho $xx = a + \frac{b}{4} - \frac{1}{2}a$; e abbreviando l'espressione, ho $xx = \frac{b}{4} + \frac{1}{2}a$; finalmente, estraendone da ambe le parti la radice quadrata , ho l'equazione $x = \sqrt{\frac{b}{4} + \frac{1}{2}a}$.

Metto i valori di a e b nei valori di x e z, ed ho l'equazioni $z = \sqrt{\frac{208}{4} - \frac{96}{2}} = \sqrt{52 - 48} = \sqrt{4} = 2$, ed $x = \sqrt{\frac{208}{4} + \frac{96}{2}} = \sqrt{52 + 48} = \sqrt{100} = 10$; onde il guadagno fatto dal primo è $x + z = 10 + 2 = 12$, e quello fatto dal secondo è $x - z = 10 - 2 = 8$; ed è evidente, che i due guadagni 12 ed 8 moltiplicati insieme fanno *96*, e che la somma 144 e *64* dei loro quadrati è 108; il ch' è secondo la proposta fatta.

203. Li susseguenti Capitoli ci somministreranno moltissimi altri esempj di Problemi determinati, onde per ora basti. Quegli poi, che vogliono in ciò maggiormente profondarsi , consultino gli Elementi delle Matematiche del Padre Lamì , quelli del Padre Prestet, la nostra *Aritmetica de' Geometri*, e l'Analisi dimostrata del Padre Reynaud.

Dell' Equazioni composte , che contengono una sola ignota.

204. Equazioni *composte* diconsi quelle , in cui l'ignota trovasi in due, o più termini innalzata a differenti gradi: l'espressione $xx + ax = bc$ è un'equazione composta; perocchè in un termine l'ignota è innalzata al secondo grado, e nell'altro ella è innalzata al primo. Similmente, l'espressione $x^3 + ax + bx = abb$ è un'equazione composta; e così dell'altre.

205. Ogni equazione composta prende il nome dal più alto grado, in cui trovasi l'ignota nell'uno, o nell'altro de' suoi termini. L'equazione $xx + ax = bc$ è del secondo grado , perciocchè il secondo è 'l grado più alto , a cui trovasi innalzata l'ignota x ; l' equazione $x^3 + ax^2 + bx = abb$ è del terzo, ec.

206. E' impossibile nell'Equazioni composte di fare, coi soli mezzi adoperati per l'Equazioni semplici , che l'ignota rimanga sola in un membro dell'

dell'Equazione, e al primo grado. Si faccia pur passare dall'uno all'altro membro, si moltiplichi, si divida, s'innalzi a più alte potenze, e si estraggano quante radici si vogliono; mai a ciò si giugnerà, come coll'esperienza si può vedere: quindi è, ch'egli ha avuto origine la necessità di cercare altri Metodi, onde risolvere quest' Equazioni.

207. Un'Equazione composta dicesi *ordinata*, quando i gradi dell' ignota cominciano dal più alto, e vanno per ordine ne' termini susseguenti. L'equazione $x^4 + bx^3 + ccx^2 + d^3x = fgg$ è ordinata, e tale più non sarebbe, se si disordinassero alcuni de' suoi termini: ma non sarebbe disordinata se ne mancassero alcuni, purchè gli altri fossero ordinati, come nell'equazione $x^4 + aax^2 + bccx = fgg$, in cui manca il secondo termine, che dovrebbe contenere x^3.

208. Moltissime volte, dopo ordinata un'equazione, si fanno passare nel primo membro tutte le grandezze, che sono nel secondo, ed allora il secondo membro diviene uguale a zero; il che si fa per poter risolvere più facilmente l'equazione: così, in vece di $z^3 + azz + bbz = ccd$, si scrive $z^3 + azz + bbz - ccd = 0$.

209. Comunemente si procura nel risolver l'equazioni composte di fare in maniera, che la più alta potenza dell'ignota non sia ne moltiplicata, ne divisa da alcun'altra grandezza; e però, se l'equazione è $axx + 2bx = dd$, e che si voglia avere l'equazione $xx + \frac{2bx}{a} = \frac{dd}{a}$, in cui la potenza xx non è ne moltiplicata, ne divisa da alcun'altra grandezza, dividesi tutto per a; similmente, se l'equazione è $\frac{xx}{a} + 2bx = dd$, e che si voglia avere l'equazione $xx + 2abx = add$, si moltiplica tutto per a; e così dell'altre.

210. Una grandezza impossibile dicesi *immaginaria*; per esempio, la grandezza $\sqrt{-a}$ è immaginaria, non potendosi trovare alcuna grandezza reale commensurabile, od incommensurabile, che dia di prodotto il quadrato $-a$; imperocchè, o la radice di questo quadrato avrebbe 'l segno $+$, od avrebbe il segno $-$: se avesse il segno $+$, e che si moltiplicasse in se stessa, ella darebbe di prodotto $+a$, e non $-a$, giacchè $+$ in $+$ dà $+$; e se avesse il segno $-$ e che si moltiplicasse in se stesta, ella darebbe altresì di prodotto $+a$, e non $-a$, giacchè $-$ in $-$ dà $+$; e però, ogni qual volta sotto 'l segno radicale $\sqrt{}$, o $\sqrt[3]{}$ vi ha una grandezza negativa, la sua radice è immaginaria. E lo stesso si dica di tutt'i segni radicali, che

che han per esponente un numero pari, e che sotto 'l segno hanno una grandezza negativa. Per esempio, la grandezza $\sqrt[4]{-a}$ è immaginaria; perocchè se $-a$ fosse una quarta potenza possibile, la sua radice avrebb' infallibilmente o 'l segno $+$, o 'l segno $-$: s'ell'avesse il segno $+$, è certo, che moltiplicandosi tre volte successivamente, s'avrebbe per quarta potenza $+a$, e non $-a$; e se avesse il segno $-$, s'avrebbe per prodotto della sua prima moltiplicazione il segno $+$, perciocchè $-$ in $-$ dà $+$; così 'l suo quadrato avrebbe 'l segno $+$: ora, questo quadro moltiplicato per la sua radice darebbe $-$ per prodotto, giacchè $+$ in $-$ dà $-$, e in conseguenza il cubo della radice avrebb' il segno $-$; finalmente, questo cubo moltiplicato per la sua radice darebbe $+$ per prodotto; così la quarta potenza della radice sarebbe $+a$, e non $-a$: ma se 'l segno radicale avesse un'esponente impari, e la grandezza, ch'è sotto 'l segno, avesse 'l segno $-$, questa radice sarebbe falsa, ma non impossibile, avendo già veduto, ch'una radice negativa innalzata al cubo dà un cubo negativo; nè sarebbe difficile il provare, che se la stessa s'innalzasse alla quinta, o alla settima potenza, ec. le sue potenze sarebbero grandezze negative, ma non immaginarie.

211. In tutte l'Equazioni composte l'ignota ha tanti valori, quanti sono i gradi dell'equazione; ciò che noi spiegheremo, esaminando com' esse si formino: detti valori poi o sono tutti positivi, o tutti negativi, o parte positivi e parte negativi, o commensurabili, od incommensurabili, o finalmente parte positivi, o negativi, e parte immaginarj; e in tutti questi casi il Problema può esser bene proposto, essendovi sempre qualche valor d' x, ch'è una grandezza possibile: che se x non avesse che valori immaginarj, il Problema conterrebbe una manifesta contraddizione.

Della Formazione dell' Equazioni composte.

212. Suppongo da una parte $x=a$ e dall'altra $x=b$; ed in queste due equazioni faccio passar nel primo membro la grandezza, ch'è nel secondo, ed ho $x-a=0$, ed $x-b=0$. Moltiplico insieme queste due equazioni, cioè 'l primo membro dell' una per lo primo membro dell'altra, e'l secondo pel secondo; ed ho l'e-

$$\begin{array}{rl} & x-a=0 \\ & x-b=0 \\ \hline \text{A.} & xx-ax+ab=0. \\ & \quad -bx \end{array}$$

qua-

quazione A, come quì si vede, i cui due producenti sono $x-a=0$, ed $x-b=0$: così, per iscomporre la detta equazione, è evidente, che debbonsi trovare i due producenti $x-a=0$, ed $x-b=0$; mediante i quali si troverà facilmente, ch'essendo a e b i valori d' x, quest' ignota ha in conseguenza tanti valori, quanti gradi ha l' equazione.

213. I producenti d'un'equazione composta chiamansi *radici* dell' equazione, tanto se sono uguali, come se non lo sono; e però, per *estrarre* le radici da un' equazione, s'intende trovar le differenti grandezze, che l' hanno prodotta.

214. Conviene avvertire, che se in un' equazione composta trovansi molti termini, in cui l' ignota sia innalzata all' istesso grado, essi non ne fanno che uno, e scrivonsi gli uni sotto gli altri: nell' equazione A, i termini $-ax-bx$ non fanno che un sol termine.

215. S'io avessi supposto $x=a$, ed $x=-b$; e che dopo aver fatto passare i termini da' secondi membri ne' primi (il che m'avrebbe dato $x-a=0$, ed $x+b=0$) avessi moltiplicato insieme queste due equazioni, è manifesto, che l' equazione composta, che ne sarebbe risultata, avrebb' avuto per producenti $x-a=0$, ch' è una grandezza positiva (perchè è uguale ad $x=a$) ed $x+b=0$, ch' è una grandezza negativa. Similmente, se avessi supposto $x=-a$, ed $x=-b$, l' equazione composta, che ne sarebbe risultata, avrebbe avuto due radici negative: se alla fine io avessi supposto $x=\sqrt{-b}$, ed $x=a$, l' equazione composta avrebb' avuto due radici, l' una immaginaria, e l' altra positiva; il che si può in varj modi combinare.

216. Ora, suppongo l' equazioni $x=a$, $x=b$, ed $x=c$; e trasportando, ho l' equazioni $x-a=0$, $x-b=0$, ed $x-c=0$; siccome moltiplicandole insieme, ho per prodotto l'equazione B del terzo grado, le cui radici sono $x-a=0$, $x-b=0$, ed $x-c=0$; e in conseguenza quest' equazione ha tante radici, quanti sono i di lei gradi: ed egli è manifesto, che le stesse possono variare, secondo che sup-

$$\begin{array}{r l}
 & x-a=0 \\
 & x-b=0 \\
\hline
 & xx-ax+ab=0 \\
 & \quad\;\, -bx \\
\hline
 & x-c=0 \\
\hline
\text{B.} & x^3-ax^2+abx-abc=0. \\
 & \quad\;\; -bx^2+acx \\
 & \quad\;\; -cx^2+cbx
\end{array}$$

fupporrò x uguale o a grandezze negative, o a grandezze positive, o a grandezze immaginarie.

Supponiamo ancora $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, ed $x-d=0$, e moltiplicando insieme queste 4 equazioni ho per prodotto l' equazione D del quarto grado, le cui radici sono $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, ed $x-d$ uguale parimente a o.

$$\begin{array}{l}
x-a=0\\
x-b=0\\
\hline
xx-ax+ab\\
\quad -bx\\
\hline
x-c=0\\
\hline
x^3-ax^2+abx-abc=0.\\
\quad -bx^2+acx\\
\quad -cx^2+cbx\\
\hline
x-d=0\\
\hline
\text{D. } x^4-ax^3+abx^2-abcx+abcd=0.\\
\quad -bx^3+acx^2-abdx\\
\quad -cx^3+cbx^2-acdx\\
\quad -dx^3+adx^2-cbdx\\
\qquad +bdx^2\\
\qquad +cdx^2
\end{array}$$

217. E' degno da osservarsi nella formazione di quest'equazioni „ 1°. Che 'l coefficiente del secondo termine è sempre uguale alla somma delle radici dell'equazione; così, nell'equazione A, il coefficiente del secondo termine $-ax-bx$ è la somma $a+b$ delle radici a, b dell'equazione. Similmente, nell'equazione B, il coefficiente del secondo termine $-ax^2-bx^2+cx^2$ è la somma $a+b+c$ delle tre radici a, b, c, e ciò ancora nell'equazione D, e nell'equazioni de'gradi più alti. 2°. Che nell'equazioni, che hanno più di tre termini, come sono l'equazioni B, e D, il coefficiente del terzo termine comprende i prodotti delle radici moltiplicate due a due in tutte le maniere possibili. Per esempio, nell'equazione B, le cui tre radici sono a, b, c, il coefficiente $ab+ac+cb$ del terzo termine comprende i prodotti delle tre radici moltiplicate a due a due; e lo stesso si può osservare nell'equazione D. 3°. Che nell'equazioni, che hanno più di quattro termini, com' è l' equazione D, il coefficiente del quarto termine contiene i prodotti abc, abd, acd, cbd delle quattro radici moltiplicate a tre a tre; come ancora, se l'equazione avesse più di cinque termini, il coefficiente del

quinto conterrebbe i prodotti delle radici moltiplicate a quattro a quattro, e così succeffivamente. 4°. E' alla fine da offervarfi, che in tutte l'equazioni l'ultimo termine è'l prodotto di tutte le radici, ed è una grandezza affatto nota: così, nell'equazione A, l'ultimo termine ab è 'l prodotto delle due radici a, b; nell'equazione B, l'ultimo termine abc è'l prodotto delle tre radici a, b, c; e così dell'altre.

218. Indi ne fegue, che fe in un'equazione manca'l fecondo termine neceffariamente conviene, che vi fieno delle radici pofitive, e negative, le quali a vicenda fi tolgano, e rendano in confeguenza il fecondo termine uguale a zero. Similmente fe manca il terzo termine in quelle, che ne hanno più di tre, è di neceffità, che vi fieno delle radici pofitive, e negative, le quali fcambievolmente fi tolgano; e lo fteffo fi dica dell'altre equazioni più innalzate, ove mancaffero alcuni termini.

219. M^r. Defcartes ha offervato, 1°. che fe tutte le radici d'un'equazione fon pofitive, i termini dell'equazione hanno alternativamente i fegni $+$, e $-$, come nelle tre equazioni A, B, D fopra riferite. 2°. Che fe fono negative, tutt'i termini avranno'l fegno $+$, il ch'è evidente, perocchè tutt'i producenti avranno'l fegno $+$. 3. Finalmente, che fe parte di loro fono negative, e parte pofitive, i termini dell'equazione non avranno alternativamente i fegni $+$, e $-$, ma queft'alternazione farà tante volte interrotta, quante faranno le radici negative; e quindi puoffi venire facilmente in cognizione del numero delle radici pofitive, e negative che fono in un'equazione.

Ciò ch'afferifce M^r. Defcartes fi può agevolmente dimoftrare col prenderfi la briga di mettere ne'producenti i caratteri, in vece delle grandezze note. Supponiamo, per efempio, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, ed $x + 4 = 0$; il prodotto di quefte tre equazioni farà un'equazione del terzo grado, la cui efpreffione effendo abbreviata s'avrà $x^3 - 1xx - 14x + 24 = 0$: ora, l'ordine alterno de' fegni in queft' equazione è una volta interrotto; e però di tre radici, l'

$$
\begin{array}{l}
x - 2 = 0 \\
\underline{x - 3 = 0} \\
xx - 2x + 6 = 0. \\
\underline{\;\;\; - 3x} \\
\underline{x + 4 = 0} \\
x^3 - 2xx + 6x + 24 = 0. \\
\;\;\; - 3xx - 8x \\
\underline{\;\;\; + 4xx - 12x} \\
x^3 - 1xx - 14x - 24 = 0.
\end{array}
$$

una

una è negativa, e l'altre due son positive; ed in fatti l'equazione $x+4=0$ è negativa, perchè ci dà $x=-4$; e l'altre due $x-2=0$, ed $x-3=0$ son positive, perchè danno $x=2$, ed $x=3$; e ciò in tutti gli altri casi.

Della Risoluzione dell' Equazioni del secondo grado.

220. Quando in un'equazione del secondo grado manca 'l secondo termine, essa si risolve facilmente, non dovendosi che far passare (supposto che non vi sia) la grandezza nota nel secondo membro, e poscia estrarre da amendue le parti la radice quadrata; così, per risolvere l'equazione $xx-bb=0$, si fa passar la grandezza bb nel secondo membro, il che dà $xx=bb$, ed estraendone la radice quadra s'ha $x=b$: che se l'equazione fosse $xx+bb=0$, od $xx=-bb$, le due radici sarebbero immaginarie, non essendovi alcuna grandezza o positiva, o negativa, che possa esser la radice del quadrato $-bb$.

221. Per risolvere un'equazione, a cui non manchi alcuno de' suoi termini, è necessario tornarsi alla memoria, che 'l quadrato di qualunque binomio $x+b$ contiene nel suo primo termine il quadro del primo termine x del binomio, due volte il primo termine x moltiplicato pel secondo, ovvero (il che vale l'istesso) due volte il secondo, o 'l doppio del secondo moltiplicato per lo primo, e finalmente il quadro del secondo (*N.* 97.); dal che ne segue, che dati i due primi termini d'un tal quadrato si potrà facilmente trovare il terzo. Dati, per esempio, i due primi termini $xx+2ax$ d'un quadro, si vedrà chiaramente, che 'l secondo termine $2ax$ è 'l prodotto del primo termine x della radice moltiplicato pel doppio del secondo; e in conseguenza pigliando la metà del coefficiente $2a$, ch'è a, si farà 'l suo quadro aa, il quale sommato ai due termini $xx+2ax$ s'avrà 'l quadro perfetto $xx+2ax+aa$: ora posto questo.

Sia l'equazione $xx-2ax+bb=0$; faccio passar bb nel secondo membro, ed ho $xx-2ax=-bb$: ma io veggo, che 'l primo membro sarebbe un quadro perfetto, se v'aggiugnessi il quadrato della metà del suo coefficiente: ora, questa metà è a, e 'l suo quadro è aa; e però, io giugno aa ad entramb'i membri, a fine di conservare l'egualità, ed ho l'equazione $xx-2ax+aa=aa-bb$. Estraggo da ambe le parti la radice quadrata; ma siccome la radice quadra del primo membro è $x-a$, od $a-x$, perocchè sì l'una, che l'

 altra

altra di queste radici moltiplicate in se stesse danno 'l primo membro $xx - 2ax + aa$; così io ho $x - a = \sqrt{aa - bb}$, od $a - x = \sqrt{aa - bb}$; e però, se nella prima di queste due equazioni faccio passar a dal primo nel secondo membro, avrò $x = a + \sqrt{aa - bb}$, che sarà l'una delle radici della proposta equazione $xx - 2ax = - bb$; e se nell'altr'equazione $a - x = \sqrt{aa - bb}$ faccio passar x dal primo nel secondo membro, e $\sqrt{aa - bb}$ dal secondo nel primo, avrò $a - \sqrt{aa - bb} = x$, che sarà la seconda radice dell'equazione proposta.

222. PRIMO ESEMPIO. *Due uomini hanno un dato numero di scudi: il primo ne ha* 10, *e se si moltiplica la parte del primo per quella del secondo, e che si tolga 'l prodotto dalla somma dai quadrati delle due parti, il residuo è* 84; *quanto ha l'un, e quanto ha l'altro.*

Chiamo a la parte 10 del primo, b il residuo 84, ed x la parte del secondo; onde la somma dei quadrati delle due parti è $xx + aa$, e 'l prodotto della prima per la seconda è ax; sottraendo adunque ax da $xx + aa$, il residuo è $xx - ax + aa = b$: così io ho l'equazione $xx - ax + aa = b$; faccio passar aa nel secondo membro, ed ho $xx - ax = b - aa$; aggiugno ad ambe le parti il quadrato $\frac{1}{4} aa$ della metà del coefficiente a, a fine di rendere il primo membro un quadrato perfetto; finalmente, estraendone la radice quadra, ho l'equazione $x - \frac{1}{2} a$, ovvero $\frac{1}{2} a - x = \sqrt{b - \frac{1}{4} aa}$; e liberando l'ignota x in tutte due quest' espressioni ho per prima radice $x = \frac{1}{2} a + \sqrt{b - \frac{1}{4} aa}$, e per seconda, ho l'equazione $x = \frac{1}{2} a - \sqrt{b - \frac{1}{4} aa}$; e ponendo i valori delle lettere note, le due radici saranno $x = 8$, ed $x = 2$, le quali sono positive: così l'equazione ha due risoluzioni reali e positive. E in fatti, se suppon-

$$xx - ax + aa = b$$
$$xx - ax = b - aa$$
$$xx - ax + \tfrac{1}{4} aa = b - \tfrac{1}{4} aa$$
$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{1}{2} a \\ \tfrac{1}{2} a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{b - \tfrac{1}{4} aa}$$
$$x = \begin{cases} \tfrac{1}{2} a + \sqrt{b - \tfrac{1}{4} aa} \\ \tfrac{1}{2} a - \sqrt{b - \tfrac{1}{4} aa} \end{cases}$$
$$x = 5 + \sqrt{84 - 75} = 5 + \sqrt{9} = 5 + 3 = 8$$
$$x = 5 - \sqrt{84 - 75} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

pongo che 'l secondo abbia 8 scudi, la parte di questo moltiplicata per quella del primo, ch'è 10, darà 80; il cui prodotto sottratto dalla somma 164 dei quadrati delle due parti, s'avrà 'l residuo 84, appunto com'era stato proposto; e se suppongo che la parte del primo sia uguale a 2, il prodotto di 2 per 10 sarà 20; il quale sottratto dalla somma 104 dei quadrati, s'avrà 'l residuo 84, similmente che prima.

Se nell'equazione $xx - ax + aa = b$ avessimo fatto passar b nel primo membro, avrebbesi avuto $xx - ax + aa - b = 0$; e perciocchè b è minore di aa, l'ultimo termine avrebb'avuto il segno $+$: così, trovandosi in quest'equazione l'ordine alterno de' segni, ne avressimo inferito, che le due radici eran positive; il che si ha trovato esser vero.

223. II. ESEMPIO. *Si son fatti tre piccioli Distaccamenti: il primo è di 10 uomini, il secondo ne ha 2 più del terzo, e se si fanno i quadrati del numero degli uomini, che sono in ogni Distaccamento, il quadrato del primo sarà uguale alla somma dei quadrati degli altri due; quanti uomini vi sono nel secondo, e nel terzo Distaccamento?*

Chiamo a il numero degli uomini del primo Distaccamento, b la differenza 2 del secondo al terzo, ed x il terzo; onde stando alla prima condizione, ho $x + b$ pel numero del secondo; faccio i quadrati aa, xx, $xx + 2bx + bb$ di questi tre numeri, e per la seconda condizione la somma de' due ultimi è uguale al primo, il che dà l'equazione $2xx + 2bx + bb = aa$. Divido tutto per 2, per liberare il primo termine dell'ignota dal suo coefficiente, indi faccio passar $\frac{bb}{2}$ nel secondo membro, finalmente aggiugno ad amendue le parti il quadro $\frac{bb}{4}$ della metà del coefficiente b del secondo termine, e trovo nel secondo membro $-\frac{bb}{4}$, in vece di $\frac{bb}{2}$, perocch'essendo la frazione $\frac{bb}{4}$, che s ha da aggiugnere, e la frazione $-\frac{bb}{2}$, che v'era prima, ridotte all'istesso denominatore, col moltiplicare per 2 il numerator e 'l denominatore della frazione

$$2xx + 2bx + bb = aa$$
$$xx + bx + \frac{bb}{2} = \frac{aa}{2}$$
$$xx + bx = \frac{aa}{2} - \frac{bb}{2}$$
$$xx + bx + \frac{bb}{4} = \frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}$$
$$\left.\begin{matrix} x + \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} + x \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$$
$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} \text{ Prima radice.}$$
$$x = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} \text{ Seconda radice.}$$
$$x + \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} = 0$$
$$x + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} = 0$$
$$xx + \frac{bx}{2} - x\sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$$
$$+ \frac{bx}{2} \qquad + \frac{bb}{4} - \frac{b}{2}\sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$$
$$+ x\sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} \qquad + \frac{b}{2}\sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} - \frac{aa}{2} + \frac{bb}{4}$$
$$xx + bx + \frac{2bb}{4} - \frac{aa}{2} = 0$$
$$\text{od } xx + bx + \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} = 0$$

ne $-\frac{bb}{2}$, s'ha la frazione $\frac{bb}{4} - \frac{2bb}{4}$ uguale a $-\frac{bb}{4}$.

Io hò dunque l'equazione $xx + bx + \frac{bb}{4} = \frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}$, ed estraendo da amendue le parti la radice quadrata, ho $x + \frac{1}{2}b$ ovvero $\frac{1}{2}b + x = \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$; e in qualunque modo io liberi x, ho

ho sempre $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$; e quantunque egli paja, che l'equazione abbia una sola radice, tuttavolta ella ne ha due; imperocchè la seconda è $x = -\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$.

E per averne una prova convincente, si faccia in amendue quest'espressioni passar tutto nel secondo membro, e s'avrà $x + \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$ $= 0$ per la prima, ed $x + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} = 0$ per la seconda; e moltiplicando insieme queste due radici, il prodotto sarà $xx + bx + \frac{bb}{4} - \frac{aa}{2} = 0$ ch' è precisamente l' equazione $xx + bx + \frac{bb}{2} = \frac{aa}{2}$ del nostro Problema, bastando solo far passare $\frac{aa}{2}$ nel primo membro della stessa per renderla perfettamente uguale al prodotto delle due radici.

Pongo nelle due radici i valori delle lettere a, b, c, ed ho $x = -1 + \sqrt{50 - 1} = -1 + \sqrt{49} = -1 + 7 = 6$ valor positivo d' x, ed $x = -1 - 7 = -8$ valor negativo d' x; e però, quantunque l'equazione abbia due radici, solamente l' una può risolver il Problema, cioè la positiva 6: onde il terzo Distaccamento ha 6 uomini, ed in conseguenza il secondo ne ha 8; e per verità i tre numeri 10, 8, e 6 corrispondono interamente alle condizioni del Problema.

Se nell' equazione $xx + bx + \frac{bb}{2} = \frac{aa}{2}$ s'avesse fatto passar la grandezza $\frac{aa}{2}$ dal secondo membro nel primo, avrebbesi avuto l' equazione $xx + bx + \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} = 0$; e a cagione della grandezza a maggiore della grandezza b, l'ultimo termine avrebb'avuto il segno $-$: quindi è, che l'ordine alterno de' segni $+$ e $-$ sarebbe stato una volta interrotto; e però (secondo la regola di M^r. Descartes) evvi nell'equazione una radice negativa, il che s' ha trovato esser vero.

Non porterò altri esempj, a fine d'evitare ogni lunghezza; mi basterà solo di far notare, che se nelle radici de' due precedenti la grandezza, ch' è sotto al segno, fosse stata negativa, le due espressioni

ſioni delle radici ſarebbero ſtate immaginarie , e in conſeguenza ch' i Problemi propoſti avrebbero contenuto una manifeſta contraddizione.

Della Riſoluzione dell' Equazioni del 3°, 4°, 5° grado , ec.

224. Vi ſono varj Metodi, onde riſolvere queſt'equazioni; ma ſiccome la maggior parte d'eſſi ſon difficili , e richiedono lunghe , nojoſe, ed imbrogliate preparazioni, ho penſato d' appigliarmi alla più ſemplice, ed è di fare in maniera, che 'l più alto grado dell' ignota ſi trovi ſenz'alcun coefficiente (ſecondo le regole date N. 209.), e di dividere l'equazione per l'ignota x, più, o meno qualche diviſore dell'ultimo termine dell'equazione, ch'è ſempre una grandezza interamente nota, e che contiene il prodotto di tutte le radici (*N.* 217.) ; imperocchè, formandoſi l'equazione col moltiplicare molte differenti grandezze di x, le quali paſſando nel primo membro danno i producenti $x - a = 0$, od $x + a = 0$, ec. (*N.* 212. 213.) è evidente, che dividendo per alcuna dell'equazioni producenti, il diviſore dee eſſer eſatto ; che ſe tale egli non è, ſarà ſegno, che l'equazione è ſtata prodotta da incommenſurabili, ovvero da incommenſurabili ed immaginarie, ec.

225. Quindi ne ſegue, che per poter riſolvere un'equazione compoſta del terzo, quarto, quinto grado, ec. conviene di neceſſità ſaper trovar tutt'i diviſori del ſuo ultimo termine interamente noto, ciò che noi vedremo nel ſeguente Problema.

226. PROBLEMA. *Trovare tutt' i diviſori d' un numero propoſto.*

Sia 'l numero 4320 ; piglio i numeri ſemplici 2, 3, 5, 7, ec. cioè que' numeri, che non poſſono dividerſi che per ſe ſteſſi, ovvero per l'unità, e divido 'l dato numero per 2 , il che mi dà 'l quoziente 2160 , ſenz'alcun reſiduo ; e però 2 è un diviſor eſatto del dato numero 2160. Divido ancora il quoziente 2160 per 2 , ed ho 'l quoziente 1080 altresì eſatto; quindi è, ch' io 'l divido ancora per 2 , e trovo un nuovo quoziente eſatto, ch' è 540, il quale diviſo altresì per 2 dà un altro quoziente eſatto 270, che ſi può ancora dividere per 2; e ſi ha 'l quoziente eſatto 135 : ma io non poſſo più dividere queſto numero per 2 , e però il

2 2 2 2 2 3 3 3 5
4320(2160(1080(540(270(135(45(15(5(1:

il divido per 3, ed ho 'l quoziente esatto 45; divido questo quoziente per 3, e trovo un nuovo quoziente 15, il quale diviso per 3 dà esattamente 5: ora, non potendo più divider 5 per 3, io 'l divido per 5; ed ho per quoziente 1, che non si può più dividere.

Onde i divisori semplici sono 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, ed 1: ora, siccome tutti questi divisori son successivi, e tanto valendo divider un numero successivamente per più numeri, come dividerlo assolutamente per lo prodotto di detti numeri (*N.* 35.), è manifesto, che le due divisioni successive per 2 e 2 danno lo stesso quoziente, che darebbero, se avessi diviso assolutamente per lo prodotto 4 de' due divisori; e però 4 è ancora un divisor esatto del numero proposto. Per la stessa ragione, i tre divisori successivi 2, 2, e 2 moltiplicati fra loro daranno un nuovo divisor esatto 8; i quattro divisori successivi 2, 2, 2, 2 moltiplicati fra loro daranno un nuovo divisor 16; e 'l prodotto de' cinque divisori 2, 2, 2, 2, 2 darà ancora un divisor 32: così noi avremo altri quattro divisori 4, 8, 16, 32 moltiplici di 2.

Faccio lo stesso cogli altri tre divisori semplici 3, 3, 3, e trovo due nuovi divisori 9 e 27 moltiplici di 3.

Moltiplico il divisor semplice 2 e li suoi moltiplici pel divisor semplice 3 e pe' suoi moltiplici, ed ho 15 nuovi divisori 6. 12. 24. 48. 96. 18. 36. 72. 144. 288. 54. 108. 216. 432. 864.

Moltiplico il divisor semplice 5 pel divisor semplice 2 e pe' suoi moltiplici, pel divisor 3 e pe' suoi moltiplici, e per i quindeci divisori precedenti; ciò che mi dà i ventitre nuovi divisori 10. 20. 40. 80. 160. 15. 45. 135. 30. 60. 120. 240. 480. 90. 180. 360. 720. 1440. 270. 540. 1080. 2160. 4320.

Così (pigliando una sol volta ogni divisor semplice, ed aggiugnendoli l' unità, ch' è parimente un divisore) abbiamo quattro divisori semplici, i quali sommati a tutti gli altri danno in tutto i quarantotto seguenti divisori 1. 2. 3. 4. 5. 8. 16. 32. 9. 27. 6. 12. 24. 48. 96. 18. 36. 72. 144. 288. 54. 108. 216. 432. 864. 10. 20. 40. 80. 160. 15. 45. 135. 30. 60. 120. 240. 480. 90. 180. 360. 720. 1440. 270. 540. 1080. 2160. 4320; ed è manifesto, che non se ne possono trovar altri, come apparisce dalla stessa operazione; imperocchè essendo 'l numero proposto diviso esattamente dai quattro divisori semplici 1. 2. 3. 5, i quali moltiplicandosi più volte fra loro l' hanno prodotto, è di necessità, ch' ogni divisore di questo numero sia o alcuno di questi quattro nu-

meri semplici, od alcuno de' loro moltiplici: ora, noi abbiamo preso tutt'i moltiplici di questi quattro divisori, che possono dividere esattamente ; onde, giugnendo a tutti questi moltiplici i quattro divisori semplici, abbiamo preso tutt' i divisori possibili, talmente che sarebbe impossibile il trovarne altri. Ciò posto.

227. Sia l'equazione del terzo grado $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, di cui si chiedano le radici; cerco tutt'i divisori dell'ultimo termine 24, i quali sono 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12., e 24; e pigliando l' ignota x, faccio $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$; e trasportando dall'uno all'altro membro, ho $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, ec. tutti valori positivi. Faccio parimente l' equazione $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, ec. e trasportando, ho $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, ec. tutti valori negativi.

Divido l'equazione proposta per ciascun dei valori positivi, finchè ne trovi uno, che divida esattamente, e veggo, che $x - 2 = 0$ è un divisor esatto; e però $x=2$ è l'una delle radici dell' equazione.

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \,(\, x^2 - 7x + 12 \\
x - 2 \\
\hline
-7x^2 + 26x \\
\quad x - 2 \\
\hline
\quad + 12x - 24 \\
\quad\quad x - 2 \\
\hline
\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Per trovare l'altre due, divido 'l quoziente $x^2 - 7x + 12 = 0$ nella stessa maniera, cioè cerco i divisori del suo ultimo termine, che sono 1. 2. 3. 4. 6 e 12, e faccio l' equazioni positive $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, ec. e le negative $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, e divido l' equazione per ciascuna delle positive, finchè ne trovi una, che divida esattamente: ora, operando in tal maniera, trovo che $x - 3 = 0$ è un divisor perfetto, e che'l quoziente è $x - 4 = 0$; così l'altre due radici sono $x=3$, ed $x = 4$; e però le tre radici sono positive; il che si potea a prima vista conoscere dallo stesso ordine alterno de' segni + e —.

$$
\begin{array}{l}
x^2 - 7x + 12 \,(\, x - 4 \\
x - 3 \\
\hline
-4x + 12 \\
\quad x - 3 \\
\hline
\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Che se dividendo per l'equazioni positive non se ne trovassero di quelle, che dividessero esattamente, sarebbe segno, non esservi alcuna radice positiva commensurabile, e in tal caso dividerebbesi per

per l'equazioni negative, finchè se ne trovasse una, che dividesse esattamente; e se terminando l'operazione come sopra, si trovassero due altre radici, le tre radici sarebbero negative: che se non si trovassero equazioni negative, le quali dividessero esattamente, sarebbe segno, che l'equazione non avrebbe nè men radici negative commensurabili.

E' facile a vedere, che si potrebbero trovare delle radici positive, delle radici negative commensurabili ed incommensurabili, e finalmente dell'immaginarie; onde, senza estendermi in ciò da vantaggio, mi contenterò di far vedere nel seguente esempio l'uso che si può fare di tali equazioni.

ESEMPIO. *Due persone han talmente fra loro diviso sei lire, che facendo 'l cubo delle due parti la differenza è 56; si ricerca quali sieno queste due parti?*

Chiamo $2a$ la somma 6, $2z$ la differenza delle due parti, e $2b$ la differenza 56 de' due cubi; dunque la parte del primo è $a + z$ (N.200.), e quella del secondo è $a - z$. Ne faccio i cubi, e sottraendo il minor dal maggiore, il residuo è $2z^3 + 6aaz$.

$$a^3 + 3aaz + 3azz + z^3 \quad \text{Cubo del } 1^{\circ}.$$
$$a^3 - 3aaz + 3azz - z^3 \quad \text{Cubo del } 2^{\circ}.$$
$$6aaz \qquad 2z^3. \quad \text{Differenza}$$
$$2z^3 + 6aaz = 2b$$
$$z^3 + 3aaz = b$$
$$z^3 + 3aaz - b = 0$$

Ora, per la condizione del Problema, questa differenza è uguale a $56 = 2b$; onde io ho $2z^3 + 6aaz = 2b$, e dividendo tutto per 2, e facendo passar b dal secondo membro nel primo, ho 'l equazione del terzo grado $z^3 + 3aaz - b = 0$, la quale necessariamente contiene delle radici negative, perchè manca il secondo termine.

Metto in quest'equazione i valori delle lettere a, b, il che mi dà $z^3 + 27z - 28 = 0$: ora, i divisori di 28 sono 1. 2. 4, 7. 14, e 28; facendo adunque le mie equazioni positive $z - 1 = 0$, $z - 4 = 0$, ec. e le negative $z + 1 = 0$, $z + 4 = 0$, ec. trovo, che $z - 1 = 0$ divid' esattamente l'equazione: così $z - 1 = 0$, ovvero $z = 1$ è una radice positiva dell' equazione.

$$z^3 + 27z - 28 \,(z^2 + z + 28$$
$$z - 1$$
$$+ z^2 + 27z$$
$$z - 1$$
$$28z - 28$$
$$z - 1$$
$$0 \quad 0$$

 Per

Per trovare l'altre due, risolvo l' equazione del secondo grado $z^2 + z + 28 = 0$ col metodo insegnato per risolvere quelle di tal grado, e trovo, che le due radici sono $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{-28 + \frac{1}{4}}$, e $z = -\frac{1}{2} - \sqrt{-28 + \frac{1}{4}}$: ora, queste due radici sono immaginarie, e però il Problema non può esser risoluto che in un sol modo; ma perchè $z = 1$, la differenza sarà $2z = 2$, e in conseguenza la parte del primo, ch'è $a + z$, dee esser $3 + 1$, o 4, e quella del secondo, ch'è $a - z$, dee esser $3 - 1$, o 2; e la somma di questi due numeri è 6, e la differenza dei loro cubi 64 ed 8 è 56, appunto com'era stato proposto.

Ora con tal metodo si risolveranno l'equazioni di qualunque grado; che se non si potessero risolvere, o che non si potesse almeno trovare qualche radice, sarebbe segno, che nell'equazione non si contengono che radici incommensurabili.

228. Quì si dovrebbe parlare della maniera d' estrar dette radici: ma perchè i problemi numerici, che vengono proposti, non contengon sole grandezze incommensurabili, e perchè quanto a' problemi geometrici s' adoperan altri Metodi, de' quali a suo luogo parleremo; così io passerò per ora questa materia sotto silenzio, a fine di non trattenere i Leggitori in cose, che non sono di gran momento. (*a*)

Della Risoluzione de' Problemi indeterminati.

229. I. ESEMPIO. *Quattro Mercanti han fatto una Società: la somma del denaro impiegato da' due primi è 14 lire, quella impiegata dal secondo e dal terzo è 16, quella impiegata da due ultimi è 22, e quella impiegata dal primo e dal quarto è 20; qual è la somma totale, e quella di ciascheduno in particolare?*

Chia-

(*a*) Nota. *Quì sarebbe ben fatto di mostrare, come generalmente si possano estrar le radici della 3ª. e 4ª. potenza. Ma perchè ciò viene dal celebre Volfio con molta chiarezza esposto, così si esortano gli Studiosi a consultare il Cap. 5. parte prima della sua Analisi, ov' e' tratta della soluzione dell'estrazioni, e quindi leggere attentamente i numeri* 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 353, 357, 358, 359, 360, 361, 362.

Chiamo a la somma 14, b la somma 16, c la somma 22, e d la somma 20, x la somma del denaro impiegato dal primo, y quella impiegata dal secondo, z quella impiegata dal terzo, ed u quella impiegata dal quarto: ora, le condizioni del Problema mi danno le quattro seguenti equazioni, le quali sommate insieme fanno un'equazione, che divisa per 2 dà l'equazione, o'l valore della somma totale: ma da questo valore io non posso inferire quali sieno le somme particolari, come feci nel terzo esempio de' Problemi determinati (N. 198.); perocchè se voglio liberare qualche ignota, per esempio x, le tre altre passeranno nel secondo membro; e per quanto io sostituisca i valori di quest' ignote prese nelle condizioni del Problema, mai scoprirò cosa veruna.

$x + y = a$ Prima condizione.
$y + z = b$ Seconda condizione.
$z + u = c$ Terza condizione.
$u + x = d$ Quarta condizione.

$2x + 2y + 2z + 2u = a + b + c + d$
$x + y + z + u = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$. Somma totale

Per trovare adunque queste somme, libero y nella prima e seconda condizione, ed ho due valori d' y; faccio un' equazione di questi due valori, e libero z, il che mi dà $z = b - a + x$. Libero z nella terza condizione, ed ho $z = c - u$.

Faccio un' equazione de' due valori di z, e ne libero l' ignota u, il che mi dà $u = -b + a - x + c$; libero similmente l' ignota u nella quarta, ed ho $u = d - x$.

$y = a - x$ Primo valore di y
$y = b - z$ Secondo valore di y

$a - x = b - z$

$z = b - a + x$ Primo valore di z
$z = c - u$ Secondo valore di z

$b - a + x = c - u$

$u = -b + a - x + c$ Primo valore di u
$u = d - x$ Secondo valore di u

$-b + a - x + c = d - x$
$-b + a + c = d$

Faccio un' equazione de' due valori di u, ed abbreviando l' espressione, cioè cancellando x da ambe le parti, ho l' equazione $-b + a + c = d$, i cui due membri contengono delle grandezze perfettamente note; il che nulla determina, e però il Problema è in-

indeterminato: ma se ne determino l'una, tutte l'altre lo diventano. Mi prefiggo perciò di determinare l'ignota x, e per non suppor x uguale a qualche numero, che non fosse proprio per la risoluzione, osservo, che nel primo valore d'y, l'ignota x dee esser minore di a, se voglio che y abbia un valor positivo. Similmente nel secondo valore di u osservo, che x dee esser minore di d, se voglio che u sia una grandezza positiva; e nulla, nel primo valore di z, io trovo, che determini l'ignota x; onde, in vece d'x, piglio una grandezza minore di a, e di d; e mettendo questo valore, in vece d'x, ne' valori di y, z, u, de' quali ora abbiam fatto menzione, tutte l'ignote si trovano determinate.

Ora $a = 14$, e $d = 20$; pigliando adunque un numero inferiore al 14, per farlo uguale ad x, risolverò il Problema.

Così io suppongo $x = 10$, e in conseguenza io ho $y = a - x = a - 10 = 14 - 10 = 4$, $z = b - a + x = 16 - 14 + 10 = 12$, ed $u = d - x = 20 - 10 = 10$; e questi quattro numeri $x = 10$, $y = 4$, $z = 12$, ed $u = 10$ corrispondono perfettamenenre alle condizioni del Problema, com'egli è facile a dimostrarsi: che se supporremo x uguale a qualche altro numero inferiore al 14, s'avranno dell'altre risoluzioni del medesimo Problema.

230. II. ESEMPIO. *Un' uomo tiene in amendue le mani varie monete, e se si moltiplica il numero delle monete che ha nell' una pel numero di quelle che ha nell' altra, e che al prodotto s'aggiunga la somma de' due numeri, la somma totale sarà 34; quante monete ha egli nell' una, e quante nell' altra mano?*

Chiamo a la somma 34, z il primo numero delle monete, ed y il secondo; così per la prima condizione del Problema ho $zy + z + y = a$. Faccio passar y dal primo nel secondo membro, poscia dividendo per $y + 1$, ho $z = \frac{a-y}{y+1}$;

$$zy + z + y = a$$
$$zy + z = a - y$$
$$z = \frac{a-y}{y+1}$$

e dopo soddisfatte tutte le condizioni del Problema mi restano due ignote. Io sono adunque in libertà di determinare quella, che più mi piace. Sia questa y; ma a cagione del numerator $a - y$ conosco, che y dee esser minore di a, se voglio che z sia una grandezza positiva, e però io posso pigliare per y qualunque grandezza, purchè inferiore ad $a = 34$.

Supponiamo $y = 4$; pongo questo valore nell'equazione z =

$= \frac{a-y}{y+1}$, e trovo $z = \frac{34-4}{4+1} = \frac{30}{5} = 6$; e i due numeri 4 e 6 corrispondono interamente alle condizioni del Problema: ma bisogna avvertire, che quantunque io possa prender per y un numero ad arbitrio, purchè inferiore al 34, non debbo tuttavolta pigliare se non se que'numeri, che possono darmi un valore di z in numero intero, perciocchè il numero delle monete, che sono nell'una e nell'altra mano, è un numero intero; e perciò io debbo rigettare tutte le supposizioni di y, che per z non mi dessero un numero intero.

231. Non si può sempre risolver un problema indeterminato, col supporre l'una dell'ignote uguale a qualunque numero; però in tal caso conviene ricorrer ad altri mezzi, come si vedrà ne' due susseguenti esempj.

232. III. ESEMPIO. *Si cerca di divider il quadrato* 100 *in due altri quadrati perfetti, cioè in due quadri, da' quali si possa estrar la radice.*

Chiamo aa il quadrato 100, ed xx, zz i due quadri cercati; onde, per la condizione del Problema, io ho $xx + zz = aa$, e'l Problema è indeterminato: ma io non sono in libertà di supporre per xx, o zz un numero ad arbitrio; che se pure in questo modo il risolvessi, non lo farei che a caso. Se suppongo, per esempio, $xx = 9$; dunque $zz = 91$, perciocchè $9 + 91 = 100$: ma 91 non è un quadro perfetto; onde il Problema non è risoluto. Similmente, se suppongo $xx = 16$; dunque $zz = 84$, perocchè $16 + 84 = 100$: ma 84 non è un quadro perfetto; e però il Problema non è risoluto. Ora, quantunque le supposizioni da me fatte sieno amendue vane, tuttavolta non nego, che si possa suppor $xx = 36$, e in conseguenza $zz = 64$; nel qual caso, la somma de' due numeri essendo 100, il Problema sarà risoluto, perciocchè tanto 36 che 64 sono due quadri perfetti: ma risolvendolo in questo modo, io l'avrò risoluto a caso; però vediamo come mi convenga operare.

Chiamo x la radice del primo quadrato; quella del secondo sarà certo minore della radice a, o 10 del quadrato aa, o sia 100, perocchè il secondo quadrato sarà minore di 100. Piglio una grandezza indeterminata y, e suppongo che la radice del secondo quadro ignoto sia $yx - a$. Ora, quest'ipotesi è possibile; imperocchè, potendo la lettera y significare qualunque numero od intero, o rotto, o composto d'intero e di frazione, è infallibile, esservi

servi qualche numero, qualunque si sia, il quale moltiplicando la radice x del primo quadro ignoto ci dà un prodotto yx; da cui sottraendo a, il residuo è uguale alla radice del secondo quadro ricercato: Io faccio tal supposizione, 1°. per avere una sola ignota. 2°. Perchè facendo i quadrati xx, ed $yyxx - 2ayx + aa$, e quindi la loro somma, essa si troverà uguale ad aa; e in conseguenza, sottraendo aa da ambe le parti, mi resterà un' equazione, ove potrò ridurre l' ignota x al primo grado, come ora vedremo.

Noi dunque, facendo la somma de' due quadri ignoti, abbiamo l' equazione, che qui si vede; e sottraendo aa da ambe le parti, indi facendo passare $2ayx$ dal primo nel secondo membro, ho l'equazione $xx + yyxx = 2ayx$; e dividendo per x, e poscia per $1 + yy$, ovvero per $yy + 1$, ho $x = \frac{2ay}{yy+1}$.

$$xx + yyxx - 2ayx + aa = aa$$
$$xx + yyxx = 2ayx$$
$$x + yyx = 2ay$$
$$x = \frac{2ay}{yy+1}$$
$$z = \frac{2ayy}{yy+1} - a$$
$$z = \frac{2ayy - ayy - a}{yy+1}$$
$$z = \frac{ayy - a}{yy+1}$$

Metto questo valor d' x nel valore della radice z, ovvero $yx - a$ del secondo quadrato, ed ho $z = \frac{2ayy}{yy+1} - a$; e riducendo a ad una frazione, il cui denominatore sia $yy + 1$, ed abbreviando l'espressione, ho $z = \frac{ayy - a}{yy+1}$: così i valori delle radici x e z dei quadri cercati sono $\frac{2ay}{yy+1}$, ed $\frac{ayy-a}{yy+1}$; e se determino il valore d'y, queste due radici mi si faran note: ma per determinarlo conosco, che nel valore di z, se facessi $y = 1$, avrei $z = \frac{1a - a}{yy+1} = 0$, e nel valor d'$x$ niente veggo, che determini y; onde, purchè io non supponga $y = 1$, posso pigliare qualunque numero, tanto inferiore, che superior all'unità.

E' ben vero, che supponendo y uguale ad un numero minore dell'unità, per esempio a $\frac{1}{2}$, avrò $z = \frac{\frac{1}{4}a - a}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-\frac{3}{4}a}{\frac{1}{4} + 1}$, e in con-

conſeguenza che la grandezza z ſarà negativa: ma ciò non impedirà, che 'l ſuo quadrato ſia poſitivo, perciocchè — in — dà +; ſicchè io confeſſo d'aver troppo limitato queſto Problema nella mia *Aritmetica de' Geometri*, e però mi è ſommamente cara l'opportunità di render paleſe lo sbaglio da me preſo, il quale ſarà mia cura di far emendare in una ſeconda edizione.

Suppongo adunque $y = 2$; e conſeguentemente io ho $x = \frac{2 \times 10 \times 2}{4+1} = \frac{40}{5} = 8$, e $z = \frac{10 \times 4 - 10}{4+1} = \frac{30}{5} = 6$; e i quadrati di queſti due numeri ſono 64 e 36, la cui ſomma è uguale a 100: che ſe ſi vorranno degli altri quadrati, la cui ſomma ſia uguale a 100, baſterà ſupporre per y qualunque numero ad arbitrio sì maggiore, che minor dell'unità.

233. IV. ESEMPIO. *Si cercano due quadrati, la cui ſomma ſia uguale alla ſomma de' due quadrati 64, e 100.*

Chiamo aa il quadrato 64, e bb il quadrato 100: egli è evidente, che ſe l'uno de' due quadri ricercati è maggior di aa, l'altro dee eſſer minore di bb; e all'oppoſto, ſe 'l primo è minore di aa, l'altro ſarà maggiore di bb; e in conſeguenza la radice del primo quadro ricercato dee eſſer o minore, o maggior della radice a del quadrato aa. Per trovare adunque un'eſpreſſione adattata ad amendue i caſi, ſuppongo che la radice del primo quadro ricercato ſia $a + z$, a cagione che potendo eſſere la grandezza z o poſitiva, o negativa, ella ſi ſommerà alla radice a, ſe è poſitiva, e ſi ſottrarrà dalla ſteſſa, ſe è negativa; e per la radice del ſecondo, ſuppongo $yz - b$, e faccio queſta ſuppoſizione, 1°. perchè i due quadrati delle radici $z + a$ ed $yz - b$ conterranno i dati quadri aa, bb; e perchè in conſeguenza facendo la loro ſomma per farne un'equazione, il cui ſecondo membro ſarà $aa + bb$, i termini aa, bb ſi cancelleranno dall'una e dall'altra parte, e finalmente potrò ridurre l'ignota z al primo grado. 2°. per la certezza che ſi ha di poter trovare un numero y di tal natura, che dopo moltiplicato per z ſia d'uopo ſottrar b dal prodotto per avere la radice del ſecondo quadro ricercato.

Faccio adunque i quadrati di $a + z$ e di $yz - b$, e giugnendogl'inſieme, la loro ſomma è uguale alla ſomma $aa + bb$: così io ho l'equazione, che quì ſi vede. Levo $aa + bb$ da ambe le parti, e facendo paſſar $2az - 2byz$ dal primo nel ſecondo membro, trovo $zz + yyzz = 2byz - 2az$; divido tutto per z, e poi per

$1 + yy$, il che mi dà $z = \frac{2by-2a}{yy+1a}$, e veggo, che determinando y scoprirò il valore dell'ignota z, e che poi mettendolo nelle radici $a + z$ ed $yz - b$ de'due quadri ricercati, scoprirò anche il valore dei detti due quadri.

$$aa + 2az + zz \quad \text{Primo Quadrato.}$$
$$yyzz - 2byz + bb \quad \text{Secondo Quadrato.}$$
$$zz + yyzz + 2az - 2byz + aa + bb \quad \text{Somma}$$
$$zz + yyzz + 2az - 2byz + aa + bb = aa + bb$$
$$zz + yyzz = 2byz - 2az$$
$$z + yyz = 2by - 2a$$
$$z = \frac{2by-2a}{yy+1}$$

Ora, per determinare y, conosco 1°. che se facessi $y = 1$, e che mettessi questo valore d'y in $z = \frac{2by-2a}{yy+1}$, avrei $z = 2$; e in conseguenza la radice $a + z$ sarebbe 10, e la radice $yz - b$ sarebbe $2 - 10$, o sia -8: così i quadrati di queste due radici mi darebbero i quadrati 100, e 64, che sono gli stessi dei proposti; e però io non debbo suppor $y = 1$. 2°. Che se volessi che z non fosse uguale a zero, mi converrebbe suppor y uguale a un numero il qual fosse tale, che 'l numeratore $2by - 2a$ del valore di z non fosse uguale a zero; e però, purchè io osservassi queste due condizioni, potrei pigliare per y qualunque numero ad arbitrio tanto intero, che rotto maggiore, o minor dell'unità.

Suppongo $y = 2$; e ponendo questo valore, e quei delle grandezze note a, b in $z = \frac{2by-2a}{yy+1}$, trovo $z = \frac{40-16}{4+1} = \frac{24}{5}$; onde $a + z = 8 + \frac{24}{5} = \frac{40+24}{5} = \frac{64}{5}$, ed $yz - b = \frac{48}{5} - 10 = \frac{48}{5} - \frac{50}{5} = -\frac{2}{5}$; e però, facendo i quadrati di $\frac{64}{5}$ e di $-\frac{2}{5}$, ho $\frac{4096}{25}$ e $\frac{4}{25}$, la cui somma è $\frac{4100}{25}$; e riducendo la frazione in interi, trovo 'l numero 164 uguale alla somma de' quadrati proposti 100 e 64, e supponendo y uguale a qualche altro numero maggiore o minore dell'unità, e che non desse $2by = 2a$, troverei degli altri quadrati, la cui somma sarebbe 164; per lo che si vede, che si possono trovare moltissimi quadrati, i quali presi a due a due sarebbero uguali alla somma de' quadri proposti.

234. V. ESEMPIO. *La differenza di due quadrati è 60; quali sono questi due quadri?*

Chiamo a la differenza 60, ed xx il quadrato maggiore; onde 'l secondo sarà $xx - a$, e perciocchè nulla scopro, suppongo che la radice di questo secondo quadrato sia $x - y$, perchè dee esser minore della radice del quadrato xx: così io ho $xx - 2yx + yy$, e questo quadro è uguale ad $xx - a$; il che mi dà un' equazione.

Cancello in quest' equazione xx da amendue le parti, e facendo passar $- 2yx$ dal primo nel secondo membro, e $- a$ dal secondo nel primo, trovo un valore di x il quale punto non m' impedisce di dare ad y qualunque valore.

$$xx - 2yx + yy = xx - a$$
$$- 2yx + yy = - a$$
$$a + yy = 2yx$$
$$\frac{a + yy}{2y} = x$$

Suppongo $y = 2$; e mettendo questo valore di y in quello d' x da me trovato, ho $\frac{60 + 4}{4} = 16 = x$; onde, facendo 'l quadrato di 16, ho $256 = xx$, e sottraendo 60 da 256, ho 196, la cui radice è 14: così i due quadri ricercati sono 256 e 196, la cui differenza è 60, appunto com' era stato proposto; e si troverebbero degli altri quadrati, la cui differenza sarebbe 60, supponendo per y qualsivoglia altro valore.

235. Questi Problemi ricercano dell' industria per trovare quelle tali espressioni proprie a fare, che l'ignota si trovi al primo grado; e in ciò consiste tutta la difficoltà, se bene coll' esercizio ella sia facile a superarsi.

CAPITOLO SETTIMO.

Delle Ragioni, Proporzioni, e Progressioni Aritmetiche.

236. Quando si paragonan insieme due grandezze, la maniera, con cui l' una contiene l' altra, o le parti di quella, dicesi generalmente *Ragione*, o *Rapporto*, ed in latino *habitudo*.

237. Si possono paragonare due grandezze in due differenti maniere:

niere: o esaminando l' eccesso della maggiore sopra la minore, ed allora la *Ragione* chiamasi *aritmetica*; od esaminando quante volte la maggiore contiene la minore, e in tal caso la *Ragione* chiamasi *geometrica*.

238. La ragione aritmetica si trova, sottraendo la minore delle due grandezze dalla maggiore; e'l residuo, o la *differenza* fa vedere il rapporto delle due grandezze: quindi è, che la Ragione aritmetica è talvolta nominata *differenza*. La Geometrica poi trovasi, dividendo la grandezza maggiore per la minore; e'l quoziente (il quale chiamasi anche esponente, perch'espone, o fa vedere quante volte la prima grandezza contiene, o è contenuta nella seconda) esprime il rapporto cercato.

239. Vi sono adunque necessariamente due termini in ogni Ragione; il primo chiamasi *antecedente*, e'l secondo *conseguente*.

240. *Proporzione* è l'uguaglianza di ragione, che trovasi fra quattro grandezze, quando dopo paragonatene due fra loro se ne paragonan altre due.

Ora, questa proporzione è *aritmetica*, se le ragioni che la compongono sono aritmetiche; ed è *geometrica*, se le ragioni componenti son geometriche.

241. Ogni proporzione ha dunque quattro termini: il primo chiamasi *primo antecedente*, il secondo *primo conseguente*, il terzo *secondo antecedente*, e'l quarto *secondo conseguente*.

242. Il primo e l'ultimo termine d'una proporzione diconsi gli *estremi*; e'l secondo e'l terzo i *medj*.

243. Quando'l secondo e'l terzo termine d'una proporzione sono uguali, cioè quando una stessa grandezza serve di primo conseguente, e di secondo antecedente, essa si chiama *media proporzionale*; e la proporzione chiamasi proporzione *continua* aritmetica, o geometrica.

244. Se i quattro differenti termini d'una proporzione sono a, b, c, d, e che la proporzione sia aritmetica, così s'esprime: $a . b \therefore c . d$. od $a, b \therefore c, d$; ma se la proporzione è geometrica, scrivesi in questo modo: $a . b :: c . d$. od $a, b :: c, d$; e sì nell'uno come nell'altro caso si spiega, dicendo: a è a b, come c è a d, cioè nella proporzione aritmetica la grandezza a supera, od è superata dalla grandezza b, come la grandezza c supera, od è superata dalla grandezza d; e nella geometrica la grandezza a contiene, od è contenuta nella grandezza b, come la grandezza c contiene, od è contenuta nella grandezza d.

245.

245. Quando si hanno più grandezze l'una dietró all' altra in proporzione continua, tal che la prima sia alla seconda, come la seconda alla terza, come la terza alla quarta, come la quarta alla quinta, e così successivamente ciò si dice *progressione*. Ora, se la progressione è aritmetica, così si scrive $\therefore a . b . c . d . e . f$. o $\therefore a, b, c, d, e, f$; e se è geometrica, scrivesi $:: a . b . c . d . e . f$. o $:: a, b, c, d, e, f$; e tutte due spieganfi, dicendo: a è a b, come b a c, come c a d, come d ad f, ec.

Esaminerem poi nel seguente Capitolo le proprietà delle Ragioni, Proporzioni, e Progressioni geometriche.

246. TEOREMA. *In ogni proporzione aritmetica, la somma degli estremi è uguale a quella de' medj; e se la proporzione è continua, la somma degli estremi è uguale al doppio della media.*

Sia la proporzione aritmetica $a, b \therefore c, f$; è manifesto, che la differenza della prima ragione $a\ b$ sarà uguale alla differenza della seconda c, f, perchè v'è proporzione: chiamiam dunque d questa differenza, e supponiamo in primo luogo, che 'l primo antecedente a sia minore del suo conseguente b, e in conseguenza, che 'l secondo antecedente c sia minor del secondo conseguente f; è evidente, ch'avremo $a+d=b$, e $c+d=f$, perciocchè d è la grandezza, che manca ad ogni antecedente, perchè sia uguale ai loro conseguenti; e però nella proporzione, mettendo $a+d$, in vece di b, e $c+d$, in vece di f, avremo la proporzione $a, a+d \therefore c, c+d$, che sarà simile alla proposta; così la somma degli estremi sarà $a+c+d$, e quella de'medj sarà $a+d+c$: ma queste due somme son composte delle medesime grandezze; ond' elle son uguali; e in conseguenza noi abbiamo $a+c+d=a+d+c$.

Supponiamo in secondo luogo, che a sia maggiore di b; anche c sarà maggior di f; ed avremo $b+d=a$, ed $f+d=c$: così, mettendo questi valori di a e c nella proporzione, avremo $b+d . b \therefore f+d . f$, e facendo la somma degli estremi e quella de'medj, avremo $b+d+f=b+f+d$.

Finalmente, supponiamo la proporzione continua $\therefore a, b, c$; essa si può scriver in questo modo $a, b \therefore b, c$: così, supponendo che la differenza sia d, e che a sia minor di b, avremo nella prima ragione $a+d=b$, e nella seconda $b+d=c$; mettendo adunque questi valori di b e c nella proporzione $a, b \therefore b, c$, avremo $a, a+d \therefore b, b+d$, e la somma $a+b+d$ degli estremi sarà uguale alla somma $a+d+b$ de' medj; onde sostituendo i valori di $b+d$ e di $a+d$, ho $a+c=2b$.

Che

Che se a è maggior di b, avremo nella prima ragione $b+d=a$, e nella seconda $c+d=b$; quindi, mettendo questi valori di a e b nella proporzione $a, b \div b, c$, avremo $b+d . b \div c+d . c$, e la somma degli estremi $b+d+c$ sarà uguale a quella de' medj $b+c+d$; dunque, ec. ciò che da dimostrarsi.

247. PROBLEMA. *Dati tre termini d'una Proporzione aritmetica, trovare il quarto.*

Supponiamo, che i primi tre termini d'una Proporzione aritmetica sieno a, b, c: chiamo x il quarto, ed ho $a . b \div c . x$; e facendo la somma degli estremi, e quella de' medj, trovo $a+x=b+c$ (*N.* 246.); e facendo passar a dal primo nel secondo membro, ho $x=b+c-a$; il che mi mostra, che se dalla somma de' medj levo 'l primo termine, il residuo sarà l'ultimo termine ricercato.

Sia $a=2$, $b=5$, $c=7$: la somma de' medj è 12, da cui sottraendo il primo termine 2, il residuo 10 sarà l'ultimo termine ricercato; ed avremo la proporzione aritmetica 2, 5 $\div$ 7, 10.

Ognun vede, che se nella proporzione mancasse o 'l primo, o 'l secondo, o'l terzo termine, dovrebbesi metter x in sua vece, e poi terminare l'operazione, come s'ha fatto.

248. AVVERTIMENTO. Se alla proporzione mancassero due termini, il Problema sarebbe inderminato; sieno, per esempio, a, b i due estremi d'una Proporzione: chiamo x la prima media, ed y la seconda; ed ho $a, x \div y, b$, e in conseguenza $a+b=y+x$ (*N.* 246.); così bisogna necessariamente determinare l'una dell'ignote, e però io determino x, ch' è la prima media, dandole un valor c maggiore, o minor di a; ed ho $a, c :: y, b$: dal che risulta $a+b=c+y$; e facendo passar c nel primo membro, trovo $a+b-c=y$.

Sia $a=2$, e $b=7$: suppongo $x=4$, ed ho 2, 4 $\div y$, 7; dal che io deduco $2+7=4+y$, o sia $9=4+y$, e in conseguenza $y=9-4=5$; e la proporzione si è 2, 3 $\div$ 5, 7.

249. TEOREMA. *In ogni Progressione aritmetica ascendente, cioè in ogni progressione, in cui i termini vanno crescendo, la somma di due termini egualmente lontani dal primo e dall' ultimo cioè egualmente lontani dagli estremi, è uguale alla somma degli estremi.*

Sia la Progressione aritmetica ascendente $\div a, b, c, e, f, g$, la cui differenza io suppongo esser d; dunque 'l secondo termine b sarà uguale ad $a+d$, il terzo c sarà uguale a $b+d$, o ad $a+d+d$,

ov-

ovvero ad $a+2d$, il quarto sarà uguale ad $a+3d$, e così successivamente, perch' essi van sempre crescendo con egual differenza: così la progressione ∴ a, b, c, e, f sarà la medesima che a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $a+5d$; ora, se in questa progressione io piglio i termini $a+d$ ed $a+4d$, che sono egualmente lontani dagli estremi, la loro somma $a+d+a+4d$, o sia $2a+5d$, sarà uguale alla somma $a+a+5d$, ovvero $2a+5d$ degli estremi. Che se piglio i termini $a+2d$, ed $a+3d$, che sono egualmente lontani dagli estremi, troverò similmente, che la loro somma è uguale alla somma $2a+5d$ degli estremi; dunque, ec.

250. AVVERTIMENTO. Che se la Progressione fosse discendente, cioè se i suoi termini andassero diminuendo, è manifesto, che prendendola a rovescio sarebbe ascendente, e in conseguenza proverebbesi nella stessa maniera, che la somma di due termini egualmente lontani dagli estremi sarebbe uguale alla somma degli estremi: ora, poichè senza veruna difficoltà si piglia una progressione a rovescio, scrivendo ∴ g, f, e, c, b, a, in vece di ∴ a, b, c, e, f, g; così, in tutto quello noi diremo, si supporrà che la progressione sia sempre ascendente, per non dare differenti regole per i due casi, e quindi moltiplicar le stesse senza necessità.

251. TEOREMA. *In ogni Progressione aritmetica ascendente, la somma di tutt' i termini è uguale alla somma degli estremi moltiplicata per la metà del numero de' termini, cioè per la metà del numero, ch' esprime quanti termini vi sono.*

Sia la progressione ascendente a, b, c, e, f, g, la quale ha sei termini; faccio la somma $b+f$ de' termini b, f egualmente lontani dagli estremi, la somma $c+e$ de' termini c, e altresì egualmente lontani dagli estremi, e la somma $a+g$ degli estremi: così queste tre somme sono uguali fra loro (*N.* 249.), e alla somma della progressione, o sia alla somma di tutt'i termini; ora, tanto vagliono queste tre somme uguali come la somma degli estremi moltiplicata per 3: ma 3 è la metà del numero de' termini 6; dunque la somma de' termini, ovvero della progressione è uguale alla somma degli estremi moltiplicata per la metà del numero de' termini.

Quindi facilmente si scorge, che se vi fosse un numero maggiore di termini che fosse pari, i termini presi a due a due darebbero sempre un numero di somme uguali, il quale sarebb' espresso dalla metà del numero de' termini; e in conseguenza avrebbesi sempre la somma della progressione uguale alla somma degli estremi moltiplicata per la metà del numero de' termini.

Ma

Ma se'l numero de' termini fosse impari, come nella progressione $\div a, b, c, e, f, g, h$, avremmo le tre somme $b+g$, $c+f$, ed $a+h$ tutte uguali, e resterebbe il termine e: ora, perchè i tre termini c, e, f sono in proporzione continua, la somma $c+f$ sarebbe uguale al doppio del termine e (*N.* 246.); onde il termine e non sarebbe che la metà dell'una delle tre somme uguali: così noi avremmo tre somme uguali, ed una mezza somma; ma tanto vagliono tre somme uguali, ed una mezza somma, come l'una delle somme moltiplicata per 3, e mezzo; dunque la somma della progressione sarebbe uguale alla somma degli estremi moltiplicata per $3\frac{1}{2}$, ch'è la metà del numero de' termini 7; e così ec. Il che dovea dimostrarsi. (*a*)

252. TEOREMA. *In ogni progressione aritmetica ascendente, l'ultimo termine contiene'l primo più la differenza moltiplicata pel numero de' termini meno uno.*

Sia la progressione aritmetica ascendente $\div a, b, c, e, f$, la cui differenza io suppongo esser d; ella sarà uguale alla progressione $\div a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$: ora, l'ultimo termine $a+4d$ contiene il primo termine a più $4d$, cioè più la differenza d moltiplicata per 4, vale a dire pel numero de' termini meno uno; cioè l' ultimo termine $a + 4d$ contiene 'l primo, più la differenza moltiplicata pel numero de' termini meno uno.

253. COROLLARIO. Da questo, e da' Teoremi precedenti ne risulta. 1°. Che per trovare la somma d'una progressione, di cui sieno dati il primo e l'ultimo termine col numero de' termini, conviene sommare insieme i due estremi, e moltiplicarli per la metà del numero de' termini. 2°. Che se sono dati il primo e l' ultimo termine col numero de' termini, si conoscerà la differenza, sottraendo 'l primo dall' ultimo termine, e dividendo 'l residuo pel numero de' termini meno uno; perocchè questo residuo è uguale al prodotto della differenza moltiplicata pel numero de' termini meno uno (*N.* 252.). 3°. Che se sono dati il primo e l'ultimo termine colla differenza, si troverà 'l numero de' termini, sottraendo 'l primo dall' ultimo, e dividendo 'l residuo per la differenza;

(a) Nota. *Perchè nell' operazione non s' abbia a triplicar $\frac{1}{2}$, basta per ottenere la somma, che si faccia 'l prodotto del termine medio nel numero di quelli, che formano la progressione. Sia* $\div 1.2.3.4.5.$ *s'avrà* $3 . 5 = 15$ *uguale alla somma cercata.*

za; poi sommando 1 al quoziente, perchè questo residuo è uguale alla differenza moltiplicata pel numero de' termini — 1 (*N.* 252.). 4°. Che se sono dati il primo termine, la differenza, e 'l numero de' termini, si conoscerà l'ultimo, facendo 'l prodotto della differenza pel numero de' termini — 1, e sommando il detto prodotto al primo termine (*N.* 252.). 5°. Che se sono dati l'ultimo termine, il numero de' termini, e la differenza, si conoscerà il primo, moltiplicando la differenza pel numero de' termini meno uno, e sottraendo 'l prodotto dall'ultimo termine, perchè il residuo sarà 'l primo (*N.* 252.). 6°. Finalmente, che se si conosce la somma della progressione, il numero de' termini, e la differenza, si conosceranno il primo e l'ultimo termine, dividendo la somma della progressione per la metà del numero de' termini; e'l quoziente sarà la somma degli estremi, perchè la somma della progressione è uguale alla somma degli estremi moltiplicata per la metà del numero de' termini (*N.* 251.); poi, si farà 'l prodotto della differenza pel numero de' termini meno uno, e sottraendolo dalla somma degli estremi, il residuo sarà 'l doppio del primo termine; perocchè la somma degli estremi contiene il primo, e l'ultimo termine, il quale altresì contiene il primo, più la differenza moltiplicata pel numero de' termini meno uno; dal che ne segue, che sottraendo questo prodotto il residuo è 'l doppio del primo termine, ec.

Vi sono adunque cinque cose in ogni progressione, vale a dire il primo termine, l'ultimo, il numero de' termini, la differenza, e la somma della progressione; e conosciute tre delle quattro prime, si conosceranno anche l'altre due. Ecco un' esempio generale, e relativo a ciascun caso.

254. PROBLEMA GENERALE. *Un' uomo ha dato per parecchi giorni del denaro, crescendo ogni giorno egualmente; sin quì tutto è ignoto: ma vediamo le differenti questioni, che si fanno col far conoscere sempre tre cose. Dicesi in primo luogo, che quest' uomo ha dato il primo giorno un soldo, l'ultimo 22, e ciò per otto giorni: Si ricerca quanto egli ha dato in tutto?*

Sommo il primo termine 1 all'ultimo 22, il che fa 23; e moltiplicando detta somma per 4, ch'è la metà del numero de' termini, il prodotto 92 è la somma totale del denaro dispensato da quest'uomo (*N.* 251.).

Si dice in secondo luogo, *che quest' uomo ha dispensato del denaro per otto giorni; che 'l primo giorno ha dato* 1, *e che ha cresciu-*

to sempre di tre: Si ricerca quanto egli ha dato l'ultimo giorno, e cosa ha dato in tutto?

Moltiplico la differenza 3 pel numero de'termini meno uno, cioè per 7, il che mi dà 21; ed aggiugnendogli 'l primo termine 1, la somma 22 è ciò, che quest'uomo ha dato l' ultimo giorno (*N.* 252.); dopo di che, io trovo la somma totale come prima.

Dices' in terzo luogo, *che quest'uomo, crescendo ogni giorno di 3, ha dato l'ultimo giorno 22 soldi: Si ricerca quanto esso ha dato il primo?*

Moltiplico la differenza 3 per 7, il che mi dà 21; e sottraendo 21 dall' ultimo termine 22, il residuo è 'l primo termine 1 (*N.* 251. 252.).

In quarto luogo *si dice, che quest'uomo ha dato il primo giorno un soldo, l'ultimo 22, e che ha cresciuto sempre di 3; Si ricerca per quanti giorni egli ha ciò fatto?*

Levo il primo termine 1 dall' ultimo 22, e'l residuo 21 è la differenza 3 moltiplicata pel numero de'termini meno uno (*N.*252.); onde, dividendo 21 per 3, il quoziente 7 è 'l numero de'termini meno uno, e in conseguenza quest'uomo ha dispensato del denaro per otto giorni.

In quinto luogo *si dice, che quest'uomo ha dispensato del denaro per otto giorni; che 'l primo giorno ha dato* 1, *e l' ultimo* 22: *Si ricerca quanto egli ha cresciuto per giorno?*

Levo il primo termine 1 dall'ultimo 22, e'l residuo 21 è la differenza moltiplicata pel numero de' termini meno uno (*N.*252.); onde io divido questo residuo per 8 — 1, o sia per 7, e 'l quoziente 3 è la differenza, che si cerca.

In sesto luogo *dicesi, che quest'uomo ha dato in tutto 92 soldi; che'l primo giorno ha dato* 1, *e l' ultimo* 22: *Si ricerca per quanti giorni egli ha ciò fatto, e quanto ha cresciuto per giorno?*

Sommo il primo all'ultimo termine, il che mi dà 23; e dividendo 92 per 23 trovo 4, ch'è la metà del numero de' termini, perocchè 92 è'l prodotto di 23 per la metà del numero de' termini (*N.* 251.): così 'l numero de' giorni è 8; quindi, sottraendo il primo termine 1 dall' ultimo 22, ho 21; divido 21 per 8 — 1, o sia per 7, e'l quoziente 3 è la differenza ricercata (*N.* 252.).

Dicesi in settimo luogo, *che quest'uomo, crescendo sempre di 3, ha dato in 8 giorni 92 soldi: Si ricerca quanto egli ha dato il primo, e'l ultimo giorno?*

Divido

Divido la somma 92 per 4, ch'è la metà del numero de' termini, e 'l quoziente 23 è la somma degli estremi (*N.* 251.); faccio 'l prodotto della differenza 3 per 8 — 1, o sia per 7, il che mi dà 21, e 'l residuo 2 è 'l doppio del primo termine; perciocchè la somma del primo e dell'ultimo contiene due volte il primo, più la differenza moltiplicata pel numero de' termini meno uno: così quest'uomo ha dato il primo giorno 1, e l'ultimo 22.

255. AVVERTIMENTO. Se in tali questioni non si dessero a conoscere tutte le cose, che sono necessarie per poterle risolvere come abbiam fatto, s'esprimerebbero le cose ignote colle lettere x, y, ec. e quindi risolverebbesi 'l problema, come ora vedremo.

256. PROBLEMA. *Da una Guernigione sono partiti il primo giorno 5 uomini, il secondo 7, e così a mano a mano, crescendo sempre di due: finalmente si trova, che in tutto ne son partiti 96. Si dimanda in quanti giorni si fece questo Distaccamento?*

Ora, è ben vero ch'io conosco tre cose, cioè il primo termine 5, la differenza 2, e la somma della progressione 96: ma siccome l'una di queste tre, cioè la somma della progressione non è nel numero delle quattro prime, di cui abbiam parlato (*N.* 253.), così io non posso risolvere il Problema colle regole ordinarie; chiamo perciò y il numero de' termini, ed in conseguenza $y - 1$ è 'l numero de' termini meno uno. Moltiplico la differenza 2 per $y - 1$, il che mi dà $2y - 2$, ed aggiugnendogli 'l primo termine 5, ho $2y + 3$ per l' ultimo termine (*N.*252.); aggiugno ad esso il primo termine 5, e $2y + 8$ è la somma degli estremi. Moltiplico

$$
\begin{array}{rl}
2 & \\
y - 1 & \\
\hline
2y - 2 & \\
5 & \\
\hline
2y + 3 & \text{Ultimo termine.} \\
5 & \\
\hline
2y + 8 & \text{Somma degli estremi.} \\
\frac{1}{2}y & \\
\hline
yy + 4y & \text{Somma della Progressione.} \\
yy + 4y = 96 & \\
yy + 4y + 4 = 100 & \\
y + 2 = 10 & \\
y = -2 + 10 = 8 &
\end{array}
$$

detta somma per $\frac{1}{2}y$, ch'è la metà del numero de' termini, e'l prodotto $yy + 4y$ è la somma della progressione: ora, per la condizione del Problema, questa somma è uguale a 96; onde io ho $yy + 4y = 96$, ch'è un'equazione del secondo grado.

Aggiugno ad ambe le parti il quadro 4 della metà del coefficiente 4 del secondo termine, e con ciò il primo membro diventa un quadro perfetto (*N.* 221.); estraggo la radice quadra da amendue le parti, ed ho $y + 2 = 10$, dunque $y = -2 + 10 = 8$ è la prima radice, e la seconda è $y = -2 - 10 = -12$, ch'è una radice negativa; perocchè se si moltiplica $y - 8 = 0$ per $y + 12 = 0$, il prodotto sarà $yy + 4y - 96 = 0$, ch'è l'equazione, che si dovea risolvere: ora, non avendo quest'equazione che una radice positiva, il Problema non può risolversi che in un sol modo, e in conseguenza 8 è il numero de' giorni, per cui si son fatti i noti distaccamenti; ciò che si potrà facilmente conoscere, continuando la progressione 5, 7, ec. fino all'ultimo termine, che sarà 19, e che giunto al primo sarà 24; e questa somma moltiplicata per la metà 4 del numero de' termini 8 darà 96, appunto secondo la proposta fatta.

257. PROBLEMA. *Un ladro fugge, e fa 10 leghe per giorno; un Birro il segue, e fa 'l primo giorno 3 leghe, il secondo 5, e così successivamente, crescendo sempre di due: in quanti giorni raggiugnerà egli il ladro, e quante leghe avran l'uno e l'altro fatte?*

Quì, fuori del primo termine 3, e della differenza 2 della progressione, tutto m'è ignoto: ma siccome il ladro fa ogni giorno 10 leghe, così io veggo, che la somma della progressione del Birro sarà uguale al numero 10 moltiplicato pel numero de' giorni da esso impiegati per raggiugnerlo; imperocchè si suppone, che tutti due sien partiti lo stesso giorno.

Chiamo adunque y il numero de' termini, o sia dei giorni; e però $y - 1$ sarà 'l numero de' termini meno l'unità. Moltiplico $y - 1$ per la differenza 2, ed ho per prodotto $2y - 2$, a cui giugnendo il primo termine 3, la somma $2y + 1$ è l'ultimo termine (*N.* 252.); aggiugno il primo termine 3 all'ultimo, ed ho la somma degli estremi $2y + 4$. Moltiplico questa somma per

$$\begin{array}{ll}
y - 1 & \\
2 & \\
\hline
2y - 2 & \\
3 & \\
\hline
2y + 1 & \text{Ultimo termine.} \\
3 & \\
\hline
2y + 4 & \text{Somma degli estremi.} \\
\tfrac{1}{2}y & \\
\hline
yy + 2y & \text{Somma della Progressione.} \\
yy + 2y = 10y & \\
y + 2 = 10 & \\
y = 10 - 2 = 8 &
\end{array}$$

per $\frac{1}{2}y$, e'l prodotto è la somma della progressione: ora, detta somma è uguale al numero 10 moltiplicato per y, come s'è detto; onde io ho l'equazione $yy + 2y = 10y$; e dividendo tutto per y, indi facendo passar 2 nel secondo membro, trovo $y = 8$: così 'l birro ha speso 8 giorni a raggiugnere il ladro; ciò che si proverà, continuando la progressione 3, 5, ec. fino all'ottavo termine, il quale sarà 17, e sommando il medesimo al primo, il che sarà 20; dopo ciò, moltiplicando per la metà 4 del numero de' termini, si troverà 80 per la somma della progressione, e questa somma sarà uguale al numero 10 moltiplicato pel numero de' termini 8: così tanto 'l ladro come 'l Birro avranno fatte 80 leghe in capo d' 8 giorni.

258. PROBLEMA. *Un'uomo ha in alquanti giorni guadagnato una progressione di luigi, la cui somma totale è 48, e quella degli estremi è 16: Si dimanda quanti dì ha giuocato, cosa ha guadagnato il primo giorno, e quanto il guadagno d'ogni giorno eccedeva quello del dì precedente?*

Divido la somma della progressione per la somma 16 degli estremi, e'l quoziente 3 è la metà del numero de' termini (*N.* 251.); ond' egli ha giuocato per 6 giorni.

Ma per rispondere a quello ancora mi si dimanda, chiamo x il primo termine, ed y la differenza. Moltiplico la differenza per 6 — 1, o sia per 5, e giugnendo al prodotto $5y$ il primo termine x, la somma $5y + x$ è l'ultimo termine (*N.* 252.); giugno a questo il primo; moltiplico la somma $5y + 2x$ per 3, ch'è la metà del numero de' termini, e'l prodotto è la somma della progressione (*N.* 251.): così io ho $15y + 6x = 48$, e fa-

$$\begin{array}{l} y \\ 5 \\ \hline 5y \\ x \\ \hline 5y + x \text{ Ultimo termine.} \\ 5y + 2x \text{ Somma degli estremi.} \\ 3 \\ \hline 15y + 6x = 48 \\ 15y = 48 - 6x \\ y = \dfrac{48 - 6x}{15} \end{array}$$

facendo passar $6x$ nel secondo membro, poi dividendo tutto per 15, ho $y = \frac{48 - 6x}{15}$; e però il Problema è indeterminato.

Ora io conosco, che per determinare x fa di mestiere, che sottraendo $6x$ da 48, il residuo possa esser diviso esattamente per 15, se pure io voglio, che 'l valore $\frac{48 - 6x}{15}$ della differenza y sia una grandezza senza frazione.

Suppongo adunque $x = 3$, ed in conseguenza $6x = 18$; e da 48 levando 18, e dividendo il residuo 30 per 15, ho per quoziente $2 = y$: così quest' uomo ha guadagnato il primo giorno 3 luigi, il secondo 5, ec. talmente che le progressione è 3, 5, 7, 9, 11, e 13; ed è manifesto, che questi numeri corrispondono perfettamente alle condizioni del Problema.

Ne in verun'altro modo esso si può risolvere, quando si voglia, che 'l primo termine e la differenza sien numeri interi: altrimenti senza questa condizione si potrà suppor per x qualunque numero ad arbitrio, purchè la grandezza $6x$ sia minore di 48; e in tante differenti maniere ne sarà possibile la risoluzione, quante diverse supposizioni si faranno per x.

Del modo di contare i Mucchj delle Palle di Cannone.

259. I Mucchj delle palle di Cannone, che veggonsi negli Arsenali, o sono piramidi quadrate, come nella figura 12 della Tavola, che si troverà in fine di questo primo Libro; o piramidi triangolari (*Fig.* 6.); o piramidi lunghe (*Fig.* 13.); o piramidi lunghe, che hanno due piramidi quadrate alle loro estremità [*Fig.* 14.], e che talvolta ancora sono interrotte da piramidi quadrate (*Fig.* 15.); e si tratta vedendo queste piramidi di sapere quante palle di cannone esse contengano: ma per far ciò conviene prima esaminare la formazione di questi mucchj.

260. Se scrivesi la serie de' numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, ec. e che prendasi 'l primo, indi la somma de' due primi, poscia quella de' tre primi, e così a mano a mano, si formerà un' altra serie di numeri 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36, ec. che chiamansi *triangolari*, perchè a differenza d'ogni altro possono disporsi in triangoli, come vedesi nelle figure 1. 2. 3. 4. 5.

261. Ogni numero triangolare adunque è la somma d'una progres-

greſſione di numeri naturali, e 'l ſuo lato è ſempre uguale all' ultimo termine della progreſſione, che lo formò, come ancora al numero de' termini della medeſima. Per eſempio, il lato del numero triangolar 10 (*Fig.* 4.), ch'è la ſomma della progreſſione 1, 2, 3, 4, è uguale all'ultimo termine 4 di detta progreſſione, ed al numero de' termini della ſteſſa; perocchè il numero de' termini d' una progreſſione di numeri naturali è ſempre uguale all' ultimo termine. Ed egli è evidente, che'l numero di file compreſe da ogni numero triangolare è altresì uguale al ſuo ultimo termine, e in conſeguenza, che ſi può pigliare queſto numero di file pel numero de' termini della progreſſione, che ha formato il numero triangolare, ovvero il numero di file per l' ultimo termine.

262. Se dunque conoſcendo 'l lato d' un numero triangolare li s' aggiugne il primo termine, e ſi moltiplica la ſomma per la metà del numero delle file, o ſia per la metà del lato, il prodotto ſarà 'l valor del numero triangolare (*N.* 251.); così, chiamando x l' ultimo termine, o ſia 'l lato, ed aggiugnendogli 1, la ſomma ſarà $x+1$; la quale moltiplicata per $\frac{1}{2}x$ darà 'l prodotto $\frac{xx+x}{2}$, ch'è l'eſpreſſione generale di qualunque numero triangolare, in cui baſta mettere il valor d' x per avere il numero cercato.

Sia, per eſempio, $x = 7$; onde $xx = 49$, ed in conſeguenza $\frac{xx+x}{2} = \frac{49+7}{2} = \frac{56}{2} = 28$; e in fatti 28 è'l numero triangolare, che ha 7 per lato; e così degli altri.

263. Se pigliaſi una ſerie di numeri triangolari, per eſempio i cinque, che ſono eſpreſſi dalle figure 1.2.3.4.5, e che ſi diſpongano per ordine l' un ſotto l'altro, talmente che 'l minor ſia ſempre ſopra 'l maggiore, ſi formerà una piramide triangolare (*Fig. 6.*); dal che ne ſegue, ch' una piramide triangolare è ſempre una ſomma di numeri triangolari.

264. Si potrebb' adunque ſenza veruna difficoltà formare una Tavola, per mezzo della quale troverebbeſi in un batter d'occhio il numero delle palle di Cannone contenute in una piramide triangolare, di cui ſi conoſceſſe il lato della baſe. La prima fila conterrebbe i numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, ec. La ſeconda conterrebbe le ſomme ſucceſſive di queſti numeri, cioè i numeri triangolari 1, 3, 6, 10, 15, ec. e la terza verrebbe formata dal primo triangolare 1,

1ª.	2ª.	3ª.
1	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
ec.	ec.	ec.

dalla

dalla somma 4 de' due primi 1, 3, dalla somma 10 de' tre primi 1, 3, 6, e così successivamente; il che darebbe i numeri 1, 4, 10, 20, 35, che chiamansi *piramidi triangolari*, perchè a distinzione di qualunque altro possono disporsi in tal sorta di piramidi.

Onde, per conoscere mediante questa Tavola quale sia il numero triangolare, il cui lato è 4, si dovrebbe cercare nella prima fila il numero 4, e accanto ad esso troverebbesi nella fila de' numeri triangolari il numero 10, il quale mostrerebbe, che 'l numero triangolare cercato è 10; e così degli altri.

Similmente, per sapere quante palle di Cannone contenga una piramide triangolare, il cui lato della base è 5, si dovrebbe cercare nella prima colonna il numero 5, e accanto ad esso troverebbesi nella terza colonna il numero 35; il quale mostrerebbe, che la piramide cercata contiene 35 palle di Cannone.

Presto daremo un Metodo più breve, col quale non sarà d' uopo portar seco una lunga Tavola.

dis265. Le piramidi quadrate son composte di più ordini, i quali cendendo sono 1.4.9.16.25, ec. cioè i quadrati de'numeri naturali. Per esempio, la piramide della figura 12 è composta de' cinque quadrati delle figure 7, 8, 9, 10, 11; così, per trovare quante palle di cannone contenga una tal piramide, basta sapere 'l valor d'una serie finita di quadrati 1.4.9.16, ec. e ciò puossi ancora ottenere costruendo la seguente Tavola.

266. Scrivo in una colonna i numeri naturali 1.2.3.4.5, ec. ch' esprimono i lati de'quadri; accanto alla stessa formo una seconda colonna, la quale contiene la progressione de'numeri impari 1.3.5.7.9, ec.; indi ne formo una terza, in cui prima io scrivo 1, poi, la somma 4 de' due primi numeri impari 1, 3, dopo, la somma 9 de'tre primi 1.3.5, e così successivamente: e questa contiene i quadrati de' numeri naturali 1.2.3 della prima; faccio finalmente una quarta fila, in cui prima io scrivo 5, poscia, la somma 5 de'due primi quadrati, indi, la somma 14 de'tre primi 1.4.9, e così a mano a mano.

1ª.	2ª.	3ª.	4ª.
1	1	1	1
2	3	4	5
3	5	9	14
4	7	16	30
5	9	25	55
ec.	ec.	ec.	ec.

Per sapere adunque quale sia il quadro, che ha 5 per lato, si cercherà nella prima colonna il numero 5, e accanto ad esso si trove-

troverà nella terza colonna il numero 25, il quale farà conoſcere, che 'l quadrato di 5 è 25.

Similmente, per ſapere quante palle di cannon contiene una piramide, il cui lato della baſe è 4, ſi cercherà nella prima fila il numero 4, e accanto ad eſſo ſi troverà nella quarta fila il numero 30, il quale farà conoſcere, che queſta piramide contiene 30 palle di cannone; e così dell'altre.

Ma perchè non ſempre ſi han le Tavole, e perchè quelle, che caſualmente ſi trovano, rade volte ſono eſatte per colpa, o negligenza de' Copiſti; così io eſporrò due metodi aſſai ſemplici per le piramidi quadrate, e triangolari; e poi farò vedere, come ſi poſſano contar le altre. Queſti metodi dipendono dal Teorema ſeguente.

267. TEOREMA. *Se pigliaſi la ſerie de' numeri naturali* 0. 1. 2. 3. 4, *ec. i quali comincian da zero, e che ſi facciano i quadrati* 0. 1. 4. 9. 16. 25. 36, *ec. dico, che facendo le ſomme de' due primi quadri, de' tre primi, ec. ognuna di loro ſarà al ſuo ultimo termine, ovvero al quadro maggiore, che in eſſa ſi contiene, moltiplicato pel numero de' termini, cioè pel numero, ch'eſprime quanti quadrati in detta ſomma ſi contengono, come* 1 *a* 3, *più come* 1 *a ſei volte la radice del quadrato maggiore.*

Potrei, dimoſtrando queſta propoſizione, ſervirmi dell'Algebra; ma ſiccome il calcolo è alquanto lungo, ed imbrogliato, così mi baſterà dimoſtrarla con una ſemplice induzione in queſto modo.

Piglio i due primi quadrati, 0, 1; la lor ſomma è 1, e 'l ultimo termine 1 moltiplicato pel numero de' termini, ovvero preſo tante volte, quanti ſono i termini, è 2: così la ſomma è al quadro maggiore moltiplicato pel numero de' termini, come 1 è a 2; e in conſeguenza eſſa n'è la metà: ora, la metà d'una grandezza è uguale al terzo, più al ſeſto di detta grandezza; onde la ſomma de' quadrati 0, 1 è all'ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come 1 a 3, più come 1 a *6*: ma *6*, o *6* × 1 è uguale alla radice 1 del quadro maggiore 1 moltiplicato per *6*; dunque la ſomma è all'ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come 1 a 3, più come 1 a *6* volte la radice del quadro maggiore.

$$\frac{0 + 1 = 1}{1 + 1 = 2} = \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}$$

Piglio i tre primi quadrati o + 1 + 4; la loro somma è 5, e 'l quadro maggior 4 moltiplicato pel numero de' termini, o sia preso tre volte, è 12; onde la somma

$$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12},$$

è all' ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come 5 a 12, e in conseguenza essa n'è li $\frac{5}{12}$: ma $\frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12}$, e $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; dunque $\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$; così la somma è all'ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come 1 a 3, più come 1 a 12 o 2×6: ma 2×6 è uguale alla radice 2 del quadro maggiore moltiplicato per 6; onde la somma è all' ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come 1 a 3, più come 1 a 6 volte la radice 2 del quadro maggiore.

Piglio i quattro primi quadrati o. 1. 4. 9; la somma è 14, e l'ultimo quadro 9 preso 4 volte è 36; onde la somma è all' ultimo termine moltiplicato pel numero

$$\frac{0.\ 1.\ 4.\ 9.}{9.\ 9.\ 9.\ 9.} = \frac{14}{36} = \frac{12}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

de' termini, come 14 a 36; così essa n'è li $\frac{14}{36}$: ora, $\frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$, ed $\frac{1}{18} = \frac{1}{3 \times 6}$; dunque la somma è all'ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come 1 a 3, più come 1 a 6 volte la radice 3 del quadro maggiore.

Piglio i cinque primi quadrati o. 1. 4. 9. 16; la lor somma è 30, e 'l ultimo quadrato 16 preso cinque volte

$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

fa 80; così la somma è $\frac{30}{80}$, ovvero $\frac{3}{8}$ dell' ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini: ora, $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$, moltiplicando tutto per 3; e $\frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4 \times 6}$; onde la somma è all' ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come 1 a 3, più come 1 a 4×6, ovvero come 1 alla radice del quadro maggiore moltiplicato per 6. Ora,

Ora, posso pigliare quantisivoglia quadrati, chè sempre troverò l'istesso; dal che risulta la dimostrazione del Teorema, la quale si troverà più geometricamente espressa nell' Aritmetica degl'Infiniti, di cui deggio trattare nel terzo libro.

268. **PROBLEMA**. *Trovar quante palle di cannone contiene una piramide quadrata?*

Suppongo che la serie de' quadrati, che compongon la piramide, cominci da zero, e sia 0, 1, 4, 9, 16, ec. fino al quadrato della base, ch'io chiamerò xx; così 'l numero de' termini di questa serie supererà d' un' unità il numero degli ordini della piramide, e tuttavia non accrescerà 'l suo valore, a cagione che zero aggiunto ad una somma punto non l'accresce. Io avrò dunque $x + 1$ pel numero de' termini, e moltiplicando l'ultimo termine per $x + 1$, avrò $x^3 + x^2$, che sarà 'l prodotto dell'ulimo termine moltiplicato pel numero de' termini: ora, la serie 0. 1. 4. 9. 16, ec. xx è uguale al terzo di questo prodotto, più ad una frazione del medesimo espressa da $\frac{1}{6x}$, e 'l terzo di $x^3 + x^2$ è $\frac{x^3 + x^2}{3}$, e l' $\frac{1}{6x}$ è $\frac{x^3 + x^2}{6x}$; dunque la serie 0. 1. 4. 9. 16 ed xx è uguale ad $\frac{x^3 + x^2}{3} + \frac{x^3 + x^2}{6x}$, e in conseguenza la data piramide sarà $\frac{x^3 + x^2}{3} + \frac{x^3 + x^2}{6x}$; il che ci dà la susseguente regola.

REGOLA. *Fate la somma del cubo, e del quadrato dell'ultimo termine; dividete prima la detta somma per 3, poi per 6 volte la radice dell'ultimo termine, ovvero per 6 volte il lato della base della piramide, e i due quozienti giunt'insieme vi daran la somma delle palle di cannone ricercata.*

Sia $x = 9$, cioè supponiamo che 'l lato della base della piramide contenga 9 palle di cannone; avremmo $\frac{x^3 + x^2}{3} + \frac{x^3 + x^2}{6x} = \frac{729 + 81}{3} + \frac{729 + 81}{6 \times 9} = \frac{810}{3} + \frac{810}{54}$: ora, $\frac{810}{3} = 270$, e $\frac{810}{54} = 15$; onde $\frac{x^3 + x^2}{3} + \frac{x^3 + x^2}{6x} = 270 + 15 = 285$: così la piramide conterrà 285 palle di cannone; ed in fatti, se si fa la serie de' quadrati 1. 4. 9. 16, ec. infino all'ultimo, che sarà 81 (perocchè 'l lato della base è 9) e ch'essi sommino, troveremo che la somma è 285.

269. **PROBLEMA**. *Trovar quante palle di cannon contiene una piramide triangolare*.

S'è già detto, ch'ogni piramide triangolare è una ferie, od una fomma di numeri triangolari (*N.* 263.), e ch'ogni numero triangolare è la fomma d'una progreffione di numeri naturali (*N.* 260.). Ora, pofto ciò.

Supponiamo che la ferie de' numeri triangolari, che compongon la piramide, cominci da zero, e che la progreffione de' numeri naturali abbia fimilmente zero per fuo primo termine; quindi 'l numero de' termini fupererà d'un'unità il numero delle file della piramide e 'l numero de' termini della progreffione 1. 2. 3, ec. fenza tuttavia accrefcere il valor ne della piramide, ne della progreffion naturale 1. 2. 3, ec.

E però ne fuccede, che chiamando x l'ultimo termine della progreffion 0. 1. 2. 3, ec. che formerà un numero triangolare, il numero de' termini farà $x + 1$; e in confeguenza la fomma della progreffion farà la grandezza $x + 0$ moltiplicata per $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (*N.* 251.) : ora, la grandezza $x + 0$, ovvero x moltiplicata per $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ dà $\frac{xx + x}{2}$; onde 'l numero triangolare formato da quefta progreffione farà ancora $\frac{xx + x}{2}$, come fu trovato fopra (*N.* 262.), e come veramente dee effere; perocchè zero non accrefce 'l valore, a cui egli è fommato.

Ora, efprimiam la progreffione 0. 1. 2. 3. 4, ec. co' caratteri 0. a. b. c. d, ec. fino all'ultimo, cui chiameremo x, e che in confeguenza farà 'l lato della bafe della piramide; dunque 'l numero triangolar 0 farà $\frac{0^2 + 0}{2}$; il numero triangolare formato da' due primi termini 0. a farà $\frac{aa + a}{2}$; quello formato dai tre primi 0. a. b farà $\frac{bb + b}{2}$ e così fucceffivamente fino all'ultimo numero triangolare, che farà $\frac{xx + x}{2}$; e non refta che di trovar la fomma di tutti quefti numeri.

Lafciamo perciò da parte il divifor 2, e facciam la fomma di tutt'i numeratori, la qual poi divideremo pel divifor 2 lafciato da parte. Quefta fomma farà compofta della ferie dei quadrati de' numeri

ri naturali 0. 1. 2. 3, ec. x, e di quella di questi stessi numeri: ora, la serie de' quadrati è $\frac{x^3 + x^2}{3} + \frac{x^3 + x^2}{6x}$ (*N.*268.), e quella della progressione 0. 1. 2. 3, ec. x è $\frac{xx + x}{2}$, come abbiam veduto; onde, sommando queste due serie, la somma de' numeri triangolari sarà $\frac{x^3 + x^2}{3} + \frac{x^3 + x^2}{6x} + \frac{xx + x}{2}$. Riduco queste tre frazioni ad un' istesso denominatore, moltiplicando il numeratore e 'l denominator della prima per 2, e quei dell' ultima per 3, e dividendo il numeratore e 'l denominator della seconda per x; il che mi dà $\frac{2x^3 + 2x^2}{6} + \frac{x^2 + x}{6} + \frac{3xx + 3x}{6}$: n'abbrevio l' espressione, ed ho $\frac{2x^3 + 6x^2 + 4x}{6}$; divido 'l numeratore e 'l denominator per 2, e la frazione si riduce ad $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{3}$: finalmente divido questa frazione pel divisor 2 lasciato da parte, e 'l quoziente $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{3}$ è la piramide cercata; dal che si deduce la regola susseguente.

$0^2 + 0$
$a^2 + a$
$b^2 + b$
$c^2 + c$
ec.
$x^2 + x$

REGOLA. *Pigliate 'l cubo del lato della base, tre volte il quadro di questo lato, e due volte lo stesso lato; fatene la somma, e dividetela per 6; ed avrete 'l numero delle palle di cannone contenute nella piramide triangolare.*

Sia 8 il lato della base; onde $x = 8$, e in conseguenza $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6} = \frac{512 + 192 + 16}{6} = \frac{720}{6} = 120$: così 120 sarà 'l numero delle palle di cannone; ed in fatti, se piglianfi gli otto primi numeri triangolari, il cui ultimo avrà 8 per lato, si troverà che la lor somma è uguale a 120.

270. **PROBLEMA.** *Trovar quante palle di cannone contiene una piramide lunga, ovvero una piramide lunga terminata da piramidi quadre, o finalmente una piramide lunga terminata ed interotta da piramidi quadre.*

Sia la piramide lunga (*Fig.* 13.); ell' è composta della piramide quadrata ABC, e della figura lunga DEHGF: così le palle di cannone contenute in queste due figure sono in egual numero di quelle contenute nell' intera figura.

Ora, avendo la piramide lungo 'l lato della sua base 6 palle di can-

cannone, faccio'l cubo, e'l quadrato di *6*; giugno insieme 216, ch'è 'l cubo, e *36*, ch'è il quadrato, ed ho la somma 252; divido questa somma per 3, e il quoziente è 84; divido la stessa per 6×6, ovvero per *36*, e 'l quoziente è 7; giugno i due quozienti 84 e 7, e la somma *91* è 'l numero delle palle di cannone contenute nella piramide ABC.

Ora, la figura DEHGF altro non è che 'l triangolo FHG preso tante volte, quante sono le palle di cannone, che si contengon nella fila DF: ma 'l triangolo FHG ha sei palle di cannone lungo la sua base HG; onde questo triangolo è $\frac{36+6}{2} = \frac{42}{2} = 21$ (*N. 262.*); moltiplicando adunque 21 pel numero 18 delle palle di cannone della fila DF, il prodotto 378 è 'l numero delle le di cannone contenute nella figura DEHGF; e però, giugnendo 378 al numero *91* della piramide quadrata ABC, la somma *469* sarà la somma totale delle palle di cannone della figura 13.

Sia la piramide lunga terminata da due piramidi quadre (*Fig.* 14.); se le due piramidi sono uguali, misuro la piramide ABC, facendo la somma *576* del cubo 512, e del quadro *64* del lato BC = 8; divido questa somma per 3, e 'l quoziente è *192*; divido la stessa per 6×8, o sia per 48, e 'l quoziente è 12; giugno insieme i due quozienti, e la somma 204 è 'l numero delle palle di cannon della piramide ABC: così raddoppiando questo numero ho 408, ch'è 'l numero delle palle di cannone delle due piramidi ABC, DEF.

Sego la figura, ch'è fra le due piramidi, in due parti, di cui l'una HRNM è una figura lunga, e l'altra SPV è una piramide triangolare: ora, la figura HRNM altro non è che 'l triangolo, il cui lato è NM = 4 preso tante volte, quante sono le palle di cannone, che si contengon nella fila HM = 17; e però, facendo 'l triangolo del lato NM, ch'è $\frac{16+4}{2} = \frac{20}{2} = 10$, e moltiplicando 10 per 17, il prodotto 170 è la somma delle palle di cannone contenute in HRNM. La piramide triangolare SPV, avendo lungo 'l lato della sua base PV tre palle di cannone, è $\frac{27+27+6}{6} = \frac{60}{6} = 10$. (*N. 269.*); onde, giugnendo 10 al numero 170 della figura HRNM, la somma 180 è 'l numero delle palle di cannone contenute fra le due piramidi; e però, giugnendo 180 alla somma 408 delle due piramidi, la somma 588 è 'l nu-

numero di tutte le palle di cannone della figura 14: e con la medesima facilità puossi calcolare la figura 15.

271. AVVERTIMENTO. Se trovo che la formula $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$ sia un pò imbrogliata, la rendo semplice in questo modo. Divido 'l numeratore e 'l denominator della seconda frazione per x, ed ho la frazione $\frac{x^2+x}{6}$ simile alla frazione $\frac{x^3+x^2}{6x}$ (*N.* 33.). Moltiplico il numeratore e 'l denominator della prima frazione per 2, ed ho la frazione $\frac{2x^3+2x^2}{6}$, ch'è ancora simile alla frazione $\frac{x^3+x^2}{3}$ (*N.* 31.): così la formula si cangia in questa $\frac{2x^3+2x^2+x^2+x}{6}$, la quale, abbreviando l'espressione, si riduce a $\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$ vera formula delle piramidi quadrate; e questa in altro non differisce da quella delle piramidi triangolari $\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$, se non che in una il termine x^3 è moltiplicato per 2, e 'l termine x non è moltiplicato che per uno, quando nell' altra il termine x^3 è moltiplicato per uno, e 'l termine x per 2. Le tre formule adunque per i mucchj delle palle di cannone sono, ponendo x pel lato della sua base,

$\frac{xx+x}{2}$ Formula dei triangoli.

$\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$ Formula delle piramidi quadrate.

$\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$ Formula delle piramidi triangolari.

CAPITOLO OTTAVO.

Delle Ragioni, Proporzioni, e Progressioni Geometriche.

272. SE 'l primo termine d' una Ragion Geometrica è uguale al secondo, la ragione dicesi *Ragione d'egualità*; se è maggiore, ella dicesi *di maggior inegualità*, e se è minore, *di minor inegualità*.

273.

273. Non biſogna confonder la ragione d'egualità coll' *egualità di ragioni*; perocchè la ragione d'egualità è fra due grandezze uguali, e l'egualità di ragioni è fra due ragioni uguali. $a = b$ è una ragione d'*egualità*, ed $a, b :: c, d$ è un'*egualità* di ragioni; onde la ragione d'egualità non ha che fare coll' egualità di ragioni.

274. La ragione diceſi dupla, tripla, quadrupla, ec. e generalmente *moltiplice*, quando l'antecedente contien' eſattamente un dato numero di volte il ſuo conſeguente, per eſempio due volte, tre volte, ec. Ma ſe l'antecedente non contien' eſattamente il ſuo conſeguente, come 'l 3, che contien 2 una volta e mezza, s'eſprime la ragione cogli ſteſſi ſuoi termini, dicendo, che la ragione è di 3 a 2; e ciò ſi fa per non ſervirſi, come facevano gli Antichi de' nomi barbari di *ſeſquialtero*, *ſeſquiterzo*, *ſopraparticolare*, *ſopraparziente*, *ſoprabiparziente*, ec.

275. La ragione ſi dice ſuddupla, ſuttripla, ſuqquadrupla, ec. e generalmente *ſommoltiplice*, quando 'l conſeguente contien' eſattamente un dato numero di volte il ſuo antecedente; imperocchè, là dove in ogni ragione il primo termine è quello, che ſi riferiſce al ſecondo, in queſta il primo termine è la metà, o 'l terzo, o 'l quarto, ec. del ſecondo: ma, ſe l'antecedente non è eſattamente contenuto nel ſuo conſeguente, s'eſprime la ragione cogli ſteſſi ſuoi termini, dicendo, che la ragione è di 2 a 3, di 4 a 5, ec.

276. Poichè l'eſponente d'una ragione è 'l quoziente della diviſione del termine maggior pel minore, è manifeſto, che 'l termine minor moltiplicato per l'eſponente dee eſſer uguale al maggiore; giacchè in ogni diviſione il prodotto del diviſore pel quoziente è uguale al dividendo. (*N.* 29.) : così nella ragione a, b ſe a è maggior di b, e che 'l quoziente del termine a diviſo per b, ovvero l'eſponente ſia p, s'avrà $a = bp$; e ſe b è maggior di a, e che 'l quoziente del termine b diviſo per a, ovvero l'eſponente ſia ancora p, s'avrà $b = ap$. Noi ſupporremo che 'l primo termine ſia ſempre maggior del ſecondo, quando eſpreſſamente non ſi dica 'l contrario.

277. TEOREMA. *In ogni proporzion geometrica il prodotto degli eſtremi è uguale a quello de' medj; e ſe la proporzione è continua, il prodotto degli eſtremi è uguale al quadrato della media.*

Sia la proporzion geometrica $a . b :: c . d$; chiamo p l'eſponente della ragione a, b, e queſto è altresì l'eſponente della ragione

gione c, d; imperocchè, essendo queste due ragioni uguali, il primo antecedente a contiene 'l suo conseguente b nell' istessa maniera, che l' antecedente c contiene 'l suo conseguente d: così noi avremo $a = bp$, e $c = dp$ (*N.* 276.); e mettendo questi valori di a e c nella proporzione, avremo $bp . b :: dp . d$, e facendo 'l prodotto degli estremi, e quello de' medj, avremo bpd e dpb: ora, questi due prodotti sono uguali, perchè sono formati dall'istesse grandezze; onde $bpd = dpb$, e rimettendo in quest' equazione la grandezza a, in vece di bp, e la grandezza c, in vece di dp, avremo $ad = bc$; e in conseguenza il prodotto degli estremi è uguale a quello de' medj.

Se la proporzione fosse continua, come $\because a, b, c$, scriverebbes' in questo modo $a, b :: b, c$; e chiamando p l'esponente, la prima ragione a, b sarebb' uguale a bp, b, e la seconda b, c sarebbe uguale a cp, c: così la proporzione cangerebbes' in questa $bp . b :: cp . c$, che sarebbe ancora l'istessa; e facendo 'l prodotto degli estremi, e quello de' medj, avrebbesi $bpc = cbp$: ma $bp = a$, e $cp = b$; onde, mettendo a in vece di bp nel primo prodotto, e b in vece di cp nel secondo, s'avrebbe $ac = bb$, cioè 'l prodotto degli estremi uguale al quadrato della media.

278. COROLLARIO. *Se quattro grandezze* a, b, c, d *sono talmente disposte, che 'l prodotto degli estremi sia uguale a quello de' medj, esse saranno in proporzione.*

Altrimenti, l' esponente della ragione a, b sarebbe differente dall' esponente della ragion c, d. Chiamiam perciò p l' esponente della ragione a, b, e q quel della ragion c, d; onde noi avremo $a = bp$, e $c = dq$: così le quattro grandezze saranno bp, b, dq, d, e 'l prodotto degli estremi bpd non sarà uguale a quello de' medj bdq; il ch'è contro la supposizione.

279. COROLLARIO II. *Se quattro grandezze* a, b, c, d *sono proporzionali, in qualunque modo esse si dispongano, saranno sempre in proporzione; basta solo che gli estremi restin tutti due estremi, o diventino tutti due medj, e che i medj restino tutti due medj, o diventin tutti due estremi.*

Onde si potranno fare i sette cambiamenti, che quì si vedono, ne' quali, come chiaramente apparisce, sempre sussiste la proporzio-

ne; perciocchè 'l prodotto degli estremi e quello de' medj sono sempre simili al prodotto degli estremi, ed a quello de' medj delle quattro grandezze a, b, c, d; cioè $ad = bc$, e $bc = ad$.

	$a.b::c.d.$	$ad = bc$
1°.	$a.c::b.d.$	$ad = bc$
2°.	$b.a::d.c.$	$cb = ad$
3°.	$b.d::a.c.$	$cb = ad$
4°.	$d.c::b.a.$	$ad = cb$
5°.	$c.a::d.b.$	$cb = ad$
6°.	$d.b::c.a.$	$ad = cb$
7°.	$c.d::a.b.$	$cb = ad$

Il primo cambiamento diceſi *alternando*, perchè ſi paragonano le grandezze alternativamente, la prima alla terza, e la ſeconda alla quarta.

Il ſecondo dices' *invertendo*, o *permutando*, perchè i conſeguenti ſi metton nel luogo degli antecedenti. Gli altri poi traggono 'l nome dalla diſpoſizione de' loro termini; così nel terzo ſi paragona il primo al ſecondo conſeguente, e 'l primo antecedente al ſecondo; nel quarto ſi paragona il ſecondo conſeguente al ſuo antecedente, e 'l primo conſeguente al ſuo antecedente, ec.

280. COROLLARIO III. *Se quattro grandezze* a, b, c, d *ſono proporzionali, o ſi ſommi, o ſi levi ogni conſeguente dal ſuo antecedente, od ogni antecedente dal ſuo conſeguente, ſempre ſuſſiſterà la proporzione.*

Onde ſi potranno fare i cambiamenti, che ſeguono, ne' quali, come dimoſtrerò, ſempre ſuſſiſte la proporzione.

Il prodotto degli eſtremi del primo cambiamento è $ad + db$, e quello de' medj è $bc + bd$: ora, i termini bd, db ſono uguali, non meno che i termini ad, bc, perocchè le quattro grandezze proporzionali a, b, c, d danno $ad = bc$; onde i prodotti $ad + db$, e $bc + bd$, che ſon compoſti di quantità uguali, ſono perfettamente uguali; e così degli altri. Il primo e 'l terzo di queſti cambiamenti diconſi *componendo*; e 'l ſecondo e 'l quarto *dividendo*.

	$a.b::c.d$	$ad = bc$
1°.	$a+b.b::c+d.d$	$ad+bd = bc+bd$
2°.	$a-b.b::c-d.d$	$ad-bd = bc-bd$
3°	$a.a+b::c.c+d$	$ac+ad = ac+bc$
	$a.a-b::c.c-d$	$ac-ad = ac-bc$

281. AVVERTIMENTO. E' evidente, che lo ſteſſo ſi può fare nelle ſette diſpoſizioni del ſecondo Corollario: ora, quando ſi dice $b+a.a::d+c.c$, ovvero $b-a.a::d-c.c$, cioè

cioè 'l primo conseguente più, o meno il suo antecedente, ciò dicesi *convertendo*.

282. COROLLARIO IV. *Se quattro grandezze sono in proporzione, e che si sommino, o si levino da' due primi termini, o da' due ultimi, o dagli antecedenti, o da' due conseguenti, o finalmente dai quattro termini, grandezze, che sieno nella stessa ragione di questi termini, sempre sussisterà la proporzione.*

Sia la proporzione $a.\ b :: c.\ d$; piglio le due grandezze m, n, che son nella stessa ragione di a e b, e dico, che $a+m.\ b+n :: c.\ d$. Supponiamo che l'esponente della ragione a, b sia p, ed avremo $a = pb$; così, essendo p anche l'esponente della ragione m, n, avremo $m = np$; onde, mettendo i valori di a, e di m in $a+m$, e $b+n$, avremo $pb+np$, $b+n$: ora, s'io divido 'l primo termine

$a.b::c.\ d$
1° $a+m.b+n::c.d$
2° $a-m.\ b-n::c.d$
3°. $a+m.b::c+n.d$
4°. $a-m.b::c-n.d$
5°. $a.b+m::c.d+n$
6°. $a.b-m::c.d-n$
7°. $a+m.b+r::c+n.d+s$
8°. $a-m.b-r::c-n.d-s$

di questa ragione pel secondo, il quoziente, o l'esponente sarà p, cioè 'l medesimo che quello della ragione a, b, o c, d; e in conseguenza le tre ragioni $pb+np$, $b+n$; a, b; c, d saranno uguali: ma la ragione $pb+np$, $b+n$ è uguale alla ragione $a+m$, $b+n$; dunque questa è altresì uguale a ciascuna delle due ragioni a, b; c, d; e però $a+m.\ b+n :: c.\ d$. E ciò è facile a dimostrarsi nel terzo, quarto, quinto, e sesto caso, supponendo che le grandezze m, n sien nella medesima ragione degli antecedenti a, b, o dei conseguenti b, d; e nel settimo, e nell'ottavo caso, le grandezze m, r, ed n, s debbono esser nella stessa ragione dei termini a, b, o c, d.

283. COROLLARIO V. *Se quattro grandezze* a, b, c, d *sono in proporzione, e che si moltiplichino, o si dividan reciprocamente per altre quattro grandezze* e, f, g, h, *le quali sieno similmente in proporzione, i prodotti, o quozienti saranno ancora in proporzione*.

Si tratta di provare che $ae.\ bf :: cg.\ db$. Chiamo p l'esponente della prima proporzione; onde $a = bp$, e $c = dp$; e mettendo questi valori di a e c nella prima proporzione, ho $bp.\ b :: dp.\ d$.

Chiamo q l'esponente della seconda; e però $e = fq$, e $g = bq$; e mettendo i valori di e e g nella seconda proporzione, ho

X 2 fq.

$fq . f . :: bq . b$. Moltiplico i termini della proporzione $bp . b :: dp . d$ per quelli della seconda $fq . f :: bq . b$, e trovo $bpfq . bf :: dpbq . db$. Dividendo il primo termine della prima ragione pel secondo, e'l quoziente, o l'esponente è pq. Divido similmente il primo termine della seconda ragione pel secondo, e'l quoziente, o l'esponente è ancora pq; onde queste due ragioni sono uguali: ma la prima $bpfq$, bf è simile alla ragione ae, bf, e la seconda $dpbq$, db è simile alla ragione cg, db; dunque le ragioni ae, bf, e cg, db sono uguali; e però $ae . bf :: cg . db$.

$$\begin{array}{l} a . b :: c . d. \\ e . f :: g . b. \\ \hline ae . bf :: cg . db \end{array}$$

$$\begin{array}{l} bp . b :: dp . d. \\ fq . f :: bq . b. \\ \hline bpfq . bf :: dpbq . db. \end{array}$$

Ora, supponiamo che i termini della prima proporzione sien divisi per quei della seconda; il che ci dà $\frac{a}{e}, \frac{b}{f} :: \frac{c}{g}, \frac{d}{b}$: pongo i valori di a, c, e, g da me trovati, ed ho $\frac{bp}{fq}, \frac{b}{f} :: \frac{dp}{bq}, \frac{d}{b}$; e dividendo l'antecedente d'ogni ragione pel suo consequente, il quoziente, o l'esponente dall'una e dall'altra parte è $\frac{p}{q}$; onde le due ragioni sono uguali, e in conseguenza $\frac{bp}{fq} . \frac{b}{f} :: \frac{dp}{bq} . \frac{d}{b}$: ma $\frac{bp}{fq} = \frac{a}{e}$, e $\frac{dp}{bd} = \frac{c}{g}$; dunque $\frac{a}{e}, \frac{b}{f} :: \frac{c}{g}, \frac{d}{b}$.

$$\begin{array}{l} a . b :: c . d \\ e . f :: g . b \\ \hline \frac{a}{e}, \frac{b}{f} :: \frac{c}{g}, \frac{d}{b} \end{array}$$

$$\frac{bp}{fq}, \frac{b}{f} :: \frac{dp}{bq} \frac{d}{b}$$

284. COROLLARIO VI. *Se quattro grandezze* a, b, c, d *sono in proporzione, i loro quadrati, i lor cubi, le loro quarte potenze, ec. ovvero le lor radici seconde, terze, ec. sono similmente in proporzione.*

Quando s'innalzan le quattro grandezze a, b, c, d al quadrato, egli è come se si moltiplicassero i termini della proporzione $a . b :: c . d$ per quelli d'un'altra $a . b :: c . d$: ma in tal caso i prodotti sono in proporzione (N. 283.); dunque i quadrati, che sono anch'essi nel numero de' prodotti, saran similmente in proporzione; e però la proporzion dei quadrati moltiplicata per quella delle prime potenze darà la proporzione de' cubi,

bi; e quella de' cubi moltiplicata per quella delle prime darà quella delle quarte potenze, ec.

Quindi ne segue, che se piglians' i termini della proporzione $a . b : : c . d$ per grandezze quadrate, le lor radici quadre daranno la proporzione $\sqrt{a} . \sqrt{b} : : \sqrt{c} . \sqrt{d}$; e se piglianfi per cubi, le loro radici cube daran la proporzione $\sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{b} : : \sqrt[3]{c} . \sqrt[3]{d}$; e così dell'altre.

285. AVVERTIMENTO. E' manifesto, che *se quattro grandezze sono in proporzione, i loro doppj, o tripli, e generalmente i loro equimoltiplici, cioè le grandezze, che le contengono un' egual numero di volte, ovvero i lor terzi, quarti, ec. e generalmente i loro sommoltiplici, cioè le grandezze, ch' esse contengono un'egual numero di volte, sono ancora in proporzione.*

Imperocchè pigliando i loro doppj, o tripli, ec. si moltiplican tutte le grandezze o per 2, o per 3, ec. e pigliando le lor metà, od i loro terzi, ec. si dividon tutte o per 2, o per 3, ec. e in conseguenza i due primi termini dopo la moltiplicazione, o divisione sono nella medesima ragion di prima (*N.* 32. 33.); e lo stesso s'intenda de' due ultimi. Onde, essendo ancora i quattro prodotti, o quozienti nella medesima ragione, la proporzion sussiste; e sussisterebbe eziandio, se si moltiplicassero, o dividessero le quattro grandezze, o le due prime, o le due ultime, o gli antecedenti, o i conseguenti per qualsisia numero od intero, o rotto, o composto d'intero, e di frazione.

286. COROLLARIO VII. *Se due prodotti sono uguali, si potrà sempre dedurne una proporzione, mettendo le due grandezze, che compongono 'l primo, nel luogo de' due estremi, o de' due medj, e quelle, che compongono 'l secondo, nel luogo de' medj, o degli estremi.*

Sieno i prodotti $ad = cb$: dico che si avrà $a . b : : c . d$, od $a . c :: b . d$; il ch'è manifesto, perocchè 'l prodotto degli estremi è uguale a quello de' medj.

287. Le due grandezze del primo prodotto diconsi *reciproche* a quelle del secondo uguale al primo; imperocchè, avendo nel primo prodotto preso 'l il primo antecedente, e nel secondo il suo conseguente, si piglia reciprocamente nel secondo prodotto il secondo antecedente, e nel primo il suo conseguente.

288. COROLLARIO VIII. *Se la ragione di due grandezze,* a, b *è maggiore di quella di due altre* c, d, *il prodotto degli estremi*

mi sarà maggior di quello de' medj; e se la ragione a, b *è minore della ragion* c, d, *il prodotto degli estremi sarà minor di quello de' medj.*

Se la ragione a, b fosse uguale alla ragion c, d, avrebbesi $ad = bc$: ora, per ipotesi, il primo antecedente è troppo grande, perchè la ragione a, b è maggiore della ragion b, c; dunque ad è maggior di bc: ma, se la ragione a, b è minore della ragion b, c, il primo antecedente a è troppo picciolo; dunque ad è minor di cd.

289. AVVERTIMENTO. Se la ragione a, b è maggiore, o minor della ragion c, d, si troverà sempre alternando, permutando, e facendo tutt' i cambiamenti sopra indicati (N. 279. 280. ec.), che 'l prodotto degli estremi sarà maggiore, o minor di quello de' medj; perciocchè se si alterna, dicendo a, c, e b, d, i prodotti ad, bc saranno ancora gli stessi, ed in conseguenza ad sarà maggiore, o minor di bc: similmente, se si compone, dicendo $a + b$. b, e $c + d$. d, i prodotti saranno $ad + bd$, e $bc + bd$; e sottraendo bd dall'una, e dall'altra parte, resterà ad maggiore, o minor di bc; il che si proverà facilmente in tutti gli altri casi.

290. PROBLEMA. *Dati tre termini d' una proporzion geometrica trovar quello, che non si conosce.*

Chiamo x il termine ignoto, ed egli è o 'l primo, o 'l secondo, o 'l terzo, o 'l quarto della proporzione. Supponiamo ch' e' sia l'ultimo; chiamo a il primo termine, b il secondo, e c il terzo. Onde io ho questa proporzione, $a. b:: c. x$; e facendo 'l prodotto degli estremi, e quello de' medj, ho $ax = bc$; e dividendo tutto per a, ho $x = \frac{bc}{a}$, cioè 'l quarto termine uguale al prodotto de' medj diviso per lo primo estremo.

Se la proporzion fosse $b. a:: x. c$, cioè che la grandezza ignota fosse la terza, farei *invertendo*, $a. b:: c. x$, e 'l prodotto degli estremi e quello de' medj darebbero $ax = bc$; dal che io dedurrei, come prima, $x = \frac{bc}{a}$.

Se la proporzione fosse $c. x:: a. b$, farei $a. b:: c. x$ (N. 279.), ed avrei ancora $ax = bc$, ed $x = \frac{bc}{a}$.

Finalmente, se la proporzion fosse $x. c:: b. a$, farei $a. b:: c. x$, (N. 279.),

(N. 279.), e quindi ancora risulterebbe $ax = bc$, ed $x = \frac{bc}{a}$.

E però, disponendo i termini in maniera, che x diventi l' ultimo, e che vi sia sempre proporzione, s' avrà 'l termine ignoto x uguale al prodotto de' medj diviso per lo primo estremo.

291. Ora, i cambiamenti da me fatti ne' tre ultimi casi non sono assolutamente necessarj; imperocchè egli è evidente, che 'l prodotto degli estremi e quello de' medj avrebber sempre dato o $bc = ax$, ovvero, il ch'è lo stesso, $ax = bc$, ed in conseguenza $x = \frac{bc}{a}$: ma tuttavia e' sarebbe stato d' uopo stabilire differenti regole per ciascun caso, quando per i cambiamenti di disposizione ne' termini una sola basta, come s'ha veduto.

292. PROBLEMA. *Dati due termini d' una proporzione trovar l' ignoto.*

Se 'l termine x, che manca, è l' ultimo, la proporzion sarà $a . b :: b . x$; dal che si deduce $ax = bb$, ed $x = \frac{bb}{a}$; e se è 'l primo, la proporzione sarà $x . b :: b . a$, od $a . b :: b . x$; dal che ancora si deduce $ax = bb$, ed $x = \frac{bb}{a}$: e ciò mi fa comprendere, che in questi due casi l' ignota sarà uguale al quadrato della media diviso per l' altra grandezza nota.

Ma se la proporzione è $a . x :: x . b$, s' avrà $xx = ab$; ed estraendo da amendue le parti la radice quadrata, s'avrà $x = \sqrt{ab}$, cioè l' ignota uguale alla radice quadra del prodotto degli estremi.

Della Proporzione inversa.

293. Le proporzioni accennate chiamansi diritte, perchè il primo termine è al secondo, come 'l terzo al quarto; ma se 'l primo fosse al secondo, come 'l quarto al terzo, la proporzione direbbesi *inversa*. Ora, questa proporzione può facilmente cangiarsi in diritta, ponendo 'l quarto termine nel luogo del terzo, e 'l terzo in quello del quarto. Sieno, per esempio, le quattro grandezze a, b, c, d talmente disposte, che la prima sia alla seconda, come la quarta alla terza; scrivo $a . b :: d . c$, e la proporzion diventa diritta; e così dell' altre.

Della Regola del Tre diritta.

294. La Regola del *Tre* diritta altro non è ch'una proporzione diritta, il cui quarto termine è ignoto.

ESEMPIO. *Se due uomini guadagnan* 10 *scudi per giorno, quanti ne guadagneranno* 12 *uomini?*

Comprendo benissimo, ch'essendo 'l numero di 12 uomini maggior di quello di 2, il guadagno di 12 uomini dee a proporzione esser maggiore del guadagno di 2; e quindi io ho la proporzion diritta: il numero 2 uomini è al numero 12 uomini, come 'l guadagno 10 di 2 uomini è al guadagno, che 12 uomini; debbon fare e questo quarto termine è l'ignota, ch'io cerco: ora, ell' è uguale al prodotto de' medj diviso per lo primo estremo (*N.* 290.); onde, moltiplicando 12 per 10, e dividendo'l prodotto per 2, il quoziente 60 è 'l guadagno, che farebbero 12 uomini.

2. 12. 10.
10
———
120

2
120(60
———
00

Della Regola del Tre inversa.

295. La Regola del *Tre* inversa altro non è ch'una proporzione inversa, il cui quarto termine è ignoto.

ESEMPIO. *Se le munizioni da bocca, che sono in una Piazza, somministrano a* 300 *uomini il necessario alimento per* 15 *giorni; per quanti lo somministreranno a* 400?

Siccome 300 uomini mangian meno di 400, è evidente, ch'essi sussisteranno per più lungo tempo: così noi abbiamo una proporzione inversa, il cui primo termine 300 è al secondo 400, come 'l quarto termine, o sia 'l numero ignoto, ch'io cerco, e che chiamo x, è al terzo termine 15 giorni; ponendo adunque il quarto termine nel luogo del terzo, e 'l terzo in quello del quarto, ho la proporzione

$400 . 300 :: 15 . x = 11\frac{1}{4}$

15
———
1500
300
———
4500

400.
4500 ($11\frac{100}{400}$, od $\frac{1}{4}$
———
500
———
100

ne diritta (*N.* 293.) 300 . 400 : : x. 15 , in cui l' ignota è'l terzo termine; faccio *invertendo* 400 . 300 : : 15 . x , e l' ignota diventa 'l quarto termine : ora , questo quarto termine è uguale al prodotto degli estremi diviso per lo primo ; onde , moltiplicando 300 per 15, e dividendo'l prodotto per 400, il quoziente $11\frac{1}{4}$ è'l numero de' giorni, per i quali potrebbero sussistere 400 uomini.

296. Se non s' avesse voluto cangiare la disposizione de' termini, è manifesto, che per trovar l' ignota s' avrebbero dovuto moltiplicare insieme i due primi termini 300 e 15 , e poscia dividere il prodotto pel terzo 400; onde gli Aritmetici ordinariamente insegnano per la Regola del Tre inversa *di fare il prodotto de' due primi termini, e dividerlo pel secondo, a differenza della Regola del Tre diritta, in cui si moltiplica il secondo pel terzo, e dividesi 'l prodotto per lo primo.*

Della Regola di Compagnia.

297. Così chiamasi la Regola di *Compagnia*, perciocchè , avendo una Società di due , o più persone guadagnato , o perduto del denaro, si cerca, come si possa conoscere il guadagno, o la perdita fatta da ciascuno a proporzione di quello, che ha messo nella borsa comune. Questa Regola si fa con tante regole del Tre , quante sono le persone, ch' entrano in Società.

ESEMPIO. *Tre persone han fatto una società, ed hanno messo nella borsa comune 600 lire : ma'l primo ne ha messo* 100 , *il secondo* 200, *e'l terzo* 300; *e dopo qualche tempo la Società ha guadagnato* 300 *lire. Si dimanda quale sia la parte del guadagno di ciascuno?*

..er trovare il guadagno del primo, dico : il fondo 600 lire della Società è a ciò, che ha messo 'l primo, cioè a 100, come 'l guadagno totale è al guadagno , che questo primo dee fare,

600. 100 : : 300.	50	*Guadagno del* 1°.
600. 200 : : 300.	100	*Guadagno del* 2°.
600. 300 : : 300.	150	*Guadagno del* 3°.
	300	*Guadagno totale.*

dovendo egli avere un guadagno proporzionato a quello che ha messo; per la stessa ragione, il fondo 600 è a ciò, che ha messo'l secondo, cioè a 200 , come'l guadagno totale è al guadagno del secondo; finalmente, il fondo 600 è a ciò, che ha messo 'l terzo, cioè a 300, come'l guadagno totale è al guadagno del terzo. On-

de, facendo le tre regole del Tre, la parte del primo è 50, quella del secondo è 100, e quella del terzo è 150; e queste tre parti sommate insieme fanno 'l guadagno totale.

298. Questa regola serve anche per dividere una grandezza in parti proporzionali alle parti note d'un'altra.

Sia, per esempio, la grandezza a, le cui parti sono b, c, d; e si voglia dividere la grandezza f in tre parti proporzionali alle parti b, c, d. Per risolvere questo Problema chiamo x, y, z le tre parti di f, e dico: la grandezza a è alla sua parte b, come la grandezza f è alla sua parte x, e facendo 'l simile per trovare le parti y e z, faccio tre regole del Tre, le quali mi danno $x = \frac{bf}{a}$, $y = \frac{cf}{a}$, e $z = \frac{df}{a}$.

$$a . b :: f . x = \frac{bf}{a}$$

$$a . c :: f . y = \frac{cf}{a}$$

$$a . d :: f . z = \frac{df}{a}$$

Della Regola di Mistione.

299. La regola di Mistione così si chiama, perchè con essa si risolvono tutte le questioni, le quali han per oggetto la mescolanza di mercanzie, o metalli.

I°. ESEMPIO. *Un Mercante ha due sorte di vino; il prezzo dell'uno è a 20 soldi la pinta, quel dell'altro è a 12, e ne vuol fare una mistione di 1888 pinte da poter vendere a 15 soldi; talmente che ciò, che guadagnerà sopra quel di 12 sia compensato dalla perdita, che farà sopra quello di 20; come dee egli fare?*

Scrivo i due prezzi 20 e 12 l'uno sotto 'l altro, e infra loro un pò verso dritta scrivo 'l prezzo medio 15; piglio la differenza 5 di 20 a 15, e la scrivo dirimpetto a 12; piglio similmente la differenza 3 di 12 a 15, e la scrivo dirimpetto a 20; faccio la somma 8 delle differenze 3 e 5, e dico: che se questo Mercante facesse una mistione di 5 pinte a 12 soldi, e di 3 a 20, il che farebbe la mistione 8, il denaro, che ritrarrebbe vendendolo a 15 soldi, equivarrebbe a quello, ch'avrebbe ritratto, se avesse venduto 'l suo vino separatamente, cioè l'uno a 12, e l'altro a 20; a cagione che 'l Mercante, vendendo 'l suo vino a 15 soldi, ne guadagna 3 sopra ognuna delle cinque pinte a 12, le quali entrano nella mistione, e in conse-

20.		3.
	15.	
12.		5.
		8

guenza

guenza egli guadagna 3 × 5, ovvero 15 ſoldi; ed all'incontro il detto Mercante, vendendo 'l ſuo vino a 15 ſoldi, ne perde 5 ſopra ognuna delle tre pinte a 20, le quali entran nella miſtione, ed in conſeguenza egli perde 3 × 5, ovvero 15 ſoldi; onde, eſſendo 'l guadagno uguale alla perdita, è manifeſto, ch' e' viene a vendere il ſuo vino al prezzo medeſimo, come ſe aveſſe venduto i due vini, l'uno a 12, e l'altro a 20.

Ora, eſſendo la miſtione ricercata di 1888 pinte, faccio due regole del Tre, dicendo per la prima: Se 8 pinte di miſtione vogliono 3 pinte a 20 ſoldi, quante ne vorrà la miſtione 1888? e per la ſeconda, ſe 8 pinte di miſtione voglion 5 pinte a 12 ſoldi, quante ne vorrà la miſtione 1888? e le due regole mi danno 708, e 1180, cioè 708 pinte a 20 ſoldi, e 1180 a 12; ed in fatti queſte due ſomme giunte inſieme fan la miſtione 1888 ricercata.

8.3::1888.	708 *Pin. a 20 ſol.*
8.5::1888.	1180 *Pin. a 15 ſol.*
	1888 *Miſtione.*

II. ESEMPIO. *Gerone Re di Siracuſa diede dell'oro al ſuo Oreſice, perchè li faceſſe una corona: compiuto 'l lavoro, venne al Re curioſità di ſapere, ſe l'oro della corona era meſcolato con altro metallo; e quindi egli propoſe la queſtione al dotto Matematico Archimede, il quale ſcoprì la quantità dell' oro e dell' argento dall' Oreſice impiegata per fare la nota corona. Si dimanda in qual modo eſſo arrivò a tale ſcoperta?*

L'Idroſtatica c'inſegna, che ſe vengon tuffati nell'acqua più corpi d'ugual peſo, ma di differente natura, eſſi perdono delle parti del loro peſo ora in maggiore, ed ora in minor quantità; il che ſi conoſce, ponendo, in vece dell'una delle ſcodelle d'una bilancia, un'uncino, che peſi quanto l'altra ſcodella, poi all'uncino s'attacca un lungo filo, a cui ſoſpendeſi 'l corpo, che ſi vuol peſare; ſi peſa prima lo ſteſſo nell'aria, e poſcia ſi tuffa nell'acqua, in maniera che la bilancia e l'altra ſcodella non la tocchino, e peſandolo nuovamente, ſi trova ch'ei ha minor peſo: quindi egli è facile a conoſcer la differenza de' peſi, e conſeguentemente la perdita del peſo, che 'l corpo fa nell'acqua. Ora ciò poſto.

Archimede preſe due verghe, l'una d'oro e l'altra d'argento, e tutte due del peſo della corona; ed avendo trovato, che la corona tuffata nell'acqua perdea più del ſuo peſo della verga d'oro, e meno della verga d'argento, riſolvette 'l Problema mediante una regola di miſtione, come ora vedremo.

Supponiamo, che la corona pesasse *96* oncie, che la perdita del suo peso nell'acqua fosse di 8 oncie, che quella del peso della verga d'oro fosse di 7 oncie e $\frac{3}{4}$, e che quella del peso della verga d'argento fosse di *9* oncie ed $\frac{1}{4}$. Ora è evidente, che la corona era composta di diversi metalli; perciocchè, se fosse stata semplicemente d'oro, come la verga d'oro, le perdite de' loro pesi nell' acqua sarebbero state uguali; mercè ch' i pesi della verga e della corona erano uguali. Similmente, se la corona fosse stata d' argento, le perdite de' pesi della corona e della verga d'argento sarebbero state uguali. Riduco le tre perdite e 'l peso *96* di ciascuna massa in frazioni, che abbian 4 per denominatore, ed ho $\frac{32}{4}$, $\frac{31}{4}$, $\frac{37}{4}$, e $\frac{384}{4}$; così le tre perdite e 'l peso *96* sono fra loro, come 32, 31, 37, e 384, cioè, se 'l peso *96* fosse stato diviso in 384 parti, la corona avrebbe perduto nell' acqua 32 parti, la verga d' oro 31, e quella d' argento 37. Unisco delle perdite 31 e 37 delle verghe d' oro, e d' argento, per avere la perdita media 32; e scrivendo la differenza 1 di 31 a 32 dirimpetto a 37, e la differenza 5 di 37 a 32 dirimpetto a 31, la somma *6* delle differenze mi mostra, che per fare una mistione di *6* oncie, la quale perdesse tanto nell'acqua, quanto *6* oncie della mistione della corona, vi vorrebbero cinqu' oncie d'oro, ed una d'argento; imperocchè ogni oncia d' oro perderebbe un' oncia di meno di ciascun' oncia della mistione, ciò che sarebbe cinqu' oncie di meno: ma l' oncia d'argento perderebbe cinqu' oncie di più d'un' oncia della mistione; onde, essendovi egual compensazione dall' una e dall' altra parte, le cinqu' oncie d' oro sommate all' oncia d'argento non perderebbero ne più, ne meno di *6* oncie della mistione.

31.		5.
	32	
37.		1.
		6.

Ora, perchè la corona pesava *96* oncie, faccio due regole del Tre, dicendo per la prima: se per una mistione di *6* oncie vi voglion cinqu' oncie d' oro, quante ve ne vorranno per una mistione di *96*? e per la seconda: se per una mistione di cinqu' oncie vi vuole un'oncia d'argento, quante ve ne vorran per una mistione di *96*? e queste due regole mi danno 80, e 16, cioè 80 oncie d'oro, e 16 d'argento.

6. 5 : : *96*. 80	*Oro*	
6. 1 : : *96*. 16	*Argento*	
96	*Mistione della corona*	

III. ESEM.

III. ESEMPIO. *Per gettare un cannone, che sia di buona qualità, mi conviene mettere 3 libbre di stagno sopra 25 di rame di primo getto: ciò posto, si ricerca, se questa mistione sia stata osservata in un vecchio cannone, che si vuol gettar di nuovo; e caso che non sia stata osservata, si dimanda la quantità di stagno, o rame di primo getto, che vi si dee aggiugnere, per render buona la mistione?*

Dalle frequenti esperienze finora fatte si ha, che se due masse, l'una di rame di primo getto, e'l altra di stagno, sono d'ugual peso, la prima perde la nona parte del suo peso, e la seconda la settima; ciò posto.

Supponiamo che 'l cannone, che si vuol gettar di nuovo, pesi 5200 libbre, e che dopo averlo ridotto in pezzi, l'uno di essi del peso di 28 libbre abbia perduto nell'acqua $\frac{206}{63}$ del suo peso, dico: se questo pezzo fosse tutto di rame di primo getto perderebbe $\frac{28}{9}$ del suo peso, e se fosse tutto di stagno perderebbe $\frac{28}{7}$; riduco queste frazioni alla stessa denominazione, ed ho $\frac{196}{63}$, e $\frac{252}{63}$; riduco similmente il peso 28 ad una frazione, il cui denominator sia 63, ed ho $\frac{1764}{63}$: così la perdita della mistione 28, quella di 28 di rame di primo getto, quella di 28 di stagno e'l peso 28 sono fra loro, come i numeri 206, 196, 252, e 1764; unisco delle perdite 196 e 252 di 28 di rame di primo getto, e di 28 di stagno colla perdita media 206, e scrivendo la differenza 10 di 196 a 206 dirimpetto a 252, e la differenza 46 di 252 a 206 dirimpetto a 196, trovo, che per fare una mistione di 56 libbre, ciascuna delle quali perdesse nell'acqua 206 parti del suo peso diviso in 1764 parti, vi vorrebbero 46 libbre di rame di primo getto, e 10 di stagno.

$$\begin{array}{lcr} 196. & & 46. \\ & 206. & \\ 252. & & 10. \\ \hline & & 56. \end{array}$$

Onde io dico: se per una mistione di 56 libbre ve ne voglion 46 di rame di primo getto, quante ve ne vorranno per una mistione di 5200?

$$56.\ 46 :: 5200.\ 4271 \tfrac{24}{56}$$
$$56.\ 10 :: 5200.\ 928 \tfrac{32}{56}$$

e similmente: se per una mistione di 56 libbre ve ne vogliono 10 di stagno,

ſtagno, quante ve ne voran per una miſtione di 5200? e queſte due regole mi danno $4271\frac{24}{56}$, e $928\frac{32}{56}$, cioè $4271\frac{24}{56}$, di rame di primo getto, e $928\frac{32}{56}$ di ſtagno.

Per trovare quanto rame di primo getto è ſtato meſſo in 28 libbre di miſtione, dico: la miſtione 56 è a 46 di rame di primo getto, come la miſtione 28 è ad un quarto termine, il quale per la regola è 23; così, vi ſono ſtate meſſe 23 libbre di rame di primo getto, in vece di 25, ed in conſeguenza 2 libbre di ſtagno di più.

E per trovare quanto rame di primo getto è neceſſario aggiugnere per render buona la miſtione, dico: ſe 3 libbre di ſtagno ne voglion 25 di rame di primo getto, quante ne vorranno $928\frac{32}{56}$? e per la regola io trovo, che $928\frac{32}{56}$ di ſtagno vogliono $7771\frac{24}{56}$ di rame di primo getto: ora già ve ne ſono $4271\frac{24}{56}$; onde io ne debbo aggiugnere ancora 3500; imperocchè 3500 e $4271\frac{24}{56}$ fan $7771\frac{24}{56}$.

300. Quando la miſtione, che ſi vuol fare, è compoſta di tre quantità, il problema può riſolverſi nello iſteſſo modo.

Supponiamo che ſi voglia fare una miſtione di tre ſorte di metalli, l'uno del prezzo di 20 ſoldi la libbra, l'altro di 12, e'l terzo di 6; e che la libbra di miſtione vaglia 10 ſoldi: ſi ſcriverà la differenza 10 di 20 a 10 dirimpetto a 6, la differenza 2 di 12 a 10 dirimpetto ſimilmente a 6, non eſſendovi che'l ſolo prezzo 6, che ſia inferiore al prezzo medio; indi ſi ſcriverà la differenza 4 di 6 a 10 dirimpetto a 20 e a 12, perchè queſte due quantità 20 e 12 han dato la lor differenza alla quantità; e facendo la ſomma 20 delle quattro grandezze 4, 4, 10 e 2 ſi conoſcerà, che per fare una miſtione di 20 libbre a 10 ſoldi la libbra ve ne voglion 4 del metallo di 20 ſoldi, 4 del metallo di 12, e 10 + 2 del metallo di 6; il che ſi dimoſtrerà come prima.

20.		4.
12.		4.
	10.	
6.		10.
		2.
		20.

301. Ma ſe la miſtione ricercata contien più di tre quantità, il problema può riſolverſi in più modi, ſuppoſto che ſi trovi più d'una quantità ſuperiore, od inferiore alla quantità media; che ſe non ſe ne trovaſſe ch'una di ſuperiore, od inferiore, il Problema non potrebbe riſolverſi che in un ſol modo, come abbiam veduto, cioè

cioè dando alla quantità, che fosse sola, tutte le differenze dell' altre, ed a ciascuna dell' altre la differenza, che fosse sola.

Sieno i prezzi di quattro quantità 25, 20, 12 e 6, e 'l prezzo medio sia 15; li dispongo tutti nel modo da me insegnato, e pigliando la differenza 10 di 25 a 15, la scrivo dirimpetto a 6; piglio similmente la differenza 9 di 6 a 15, e la scrivo dirimpetto a 25; ponendo sempre attenzione, che quando la differenza d'una grandezza è scritta dirimpetto ad un' altra, la differenza di quest' altra sia reciprocamente scritta dirimpetto alla prima. Piglio la differenza 5 di 20 a 15, e la scrivo dirimpetto a 12; piglio parimente la differenza 3 di 12 a 15, e la scrivo dirimpetto a 20: così la somma 27 delle differenze 9, 3, 5 e 10 mi mostra, che per una mistione di 27 libbre ve ne vorrebbero 9 a 25 soldi la libbra, 3 a 20, 5 a 12, e 6 a 20.

25.		9.
20.		3.
	15.	
12.		5.
6.		10.
		27.

Se voglio un' altra risoluzione, scrivo la differenza 10 di 25 a 15, non più dirimpetto a 6, ma dirimpetto a 12, e la differenza 3 di 12 a 15 dirimpetto a 20; scrivo similmente la differenza 5 di 20 a 15 dirimpetto a 6, e la differenza 9 di 6 a 15 dirimpetto a 20; e la somma 27 delle differenze mi mostra, che per una mistione di 27 libbre del prezzo di 15 soldi la libbra vi vorrebbero 3 libbre a 25 soldi, 9 a 20, 10 a 12, e 5 a 6; e questa mistione è differente dalla prima: nè altre con questo metodo io potrei farne, a cagione che non posso cangiar le differenze se non in questi due modi; ed è manifesto, che se le cose da mescolarsi fossero in maggior numero, io potrei anche fare più differenti mistioni.

25.		3.
20.		9.
	15.	
12.		10.
6.		5.
		27.

Chi leggerà la mia *Aritmetica de' Geometri* troverà parecchi metodi, i quali insegnano a risolver tai problemi in più maniere differenti; ma siccome io ho detto quanto basta, così per ora nulla soggiugnerò.

Delle Progressioni Geometriche.

302. **TEOREMA.** *Se si ha una serie di Ragioni uguali, le quali sieno, o no in progression geometrica, la somma di tutti*

ti gli antecedenti è alla somma di tutt' i conseguenti, come l' uno degli antecedenti è al suo conseguente.

Sien le Ragioni uguali $a . b :: c . d :: e . f$, le quali non sono in progressione. Perocchè ogni antecedente contiene, od è contenuto nel suo conseguente nella stessa maniera, è manifesto, che tutti gli antecedenti conterranno, o saran contenuti nella stessa maniera nei loro conseguenti; ed in conseguenza tutti gli antecedenti saranno a tutt' i conseguenti, come l' uno degli antecedenti è al suo conseguente: così s' avrà $a + c + e . b + d + f :: a . b$. Se a è doppio di b, c sarà doppio di d, ed e doppio di f; ed egli è evidente, che tutt' i doppj $a + c + e$ conterranno i lor semplici $b + d + f$, come l' uno de' doppj a contiene 'l suo semplice b, ec.

Sia la progressione $:: a, b, c, d$; essa si può scrivere in questo modo: $a . b :: b . c :: c . d$; il che fa una serie di ragioni uguali. Onde si proverà, come sopra, che $a + b + c . b + c + d :: a . b$.

303. COROLLARIO. Quindi risulta, ch' in ogni progressione la somma di tutt' i termini meno l' ultimo è alla somma di tutt' i termini meno 'l primo, come 'l primo è al secondo, ovvero come 'l secondo è al terzo, ec.

304. TEOREMA. *In ogni progression geometrica ascendente, il secondo termine meno 'l primo è al primo, come l' ultimo meno 'l primo è alla somma di tutt' i termini, che precedon l' ultimo.*

Sia la progressione ascendente $:: a, b, c, d, e$; pel Teorema n°. 302 noi abbiamo $a + b + c + d . b + c + d + e :: a . b$. Onde *invertendo* abbiamo $b + c + d + e . a + b + c + d :: b . a$; e *dividendo* avremo $b + c + d + e - a - b - c - d . a + b + c + d :: b - a . a$; ed abbreviando l' espressione del primo termine avremo $e - a . a + b + c + d :: b - a . a$; e ponendo la seconda Ragione nel luogo della prima, e la prima in quello della seconda, avremo $b - a . a :: e - a . a + b + c + d$; il che si dovea dimostrare.

305. AVVERTIMENTO I°. S' osservi, ch' in vece di dire il secondo meno 'l primo è al primo, potrebbesi dire il terzo meno 'l secondo è al secondo, ovvero 'l quarto meno 'l terzo è al terzo, ec. o sia l' ultimo meno 'l penultimo è al penultimo, ec. imperocchè, essendo la progression composta delle Ragioni uguali $a . b :: b . c :: c . d :: d . e$, egli è evidente, che $b - a . a :: c - b . b :: d - c . c :: e - d . d$; e in conseguenza, in vece di

$b - a$.

$b - a . a$, posso mettere o $c - b . b$, o $d - c . c$, o finalmente $e - d . d$.

306. AVVERTIMENTO II. Se la progression fosse discendente, come : : $e . d . c . b . a$, piglierebbesi a rovescio, e s' avrebbe la progressione ascendente : : $a . b . c . d . e$, similmente che prima.

307. TEOREMA. *In ogni progression geometrica ascendente, il secondo termine è uguale al primo moltiplicato per l' Esponente, il terzo è uguale al primo moltiplicato per la seconda potenza dell' Esponente, il quarto è uguale al primo moltiplicato per la terza potenza dell' Esponente, e così a mano a mano.*

Sia la progressione ascendente : : $a . b . c . d . e$, e l' Esponente sia p; onde 'l secondo termine b sarà ap. e mettendo questo valor di b nella seconda ragione b, c, avremo $ap . c$; e siccome l' Esponente di questa Ragione è ancora p, così noi avremo $ap \times p$, ovvero $app = c$; e per la stessa Ragione noi avremo $ap^3 = d$, ed $ap^4 = e$: e però la progressione proposta sarà simile a questa : : $a . ap . app . ap^3 . ap^4$, in cui vedesi, che 'l secondo termine è uguale al primo moltiplicato per l' Esponente; che 'l terzo è uguale al primo moltiplicato per la seconda potenza di p, ec.

308. Se la progression fosse discendente, come : : $e . d . c . b . a$, piglierebbesi a rovescio, e s' avrebbe la progressione ascendente : : $a . b . c . d . e$, in cui si proverebbe l' istesso che sopra.

309. COROLLARIO. Quindi ne segue, ch' in ogni progressione geometrica ascendente, l' ultimo termine è uguale al primo moltiplicato per l' Esponente innalzato ad una potenza, il cui grado è uguale al numero de' termini meno uno; perciocchè nella progressione : : a, ap, app, ap^3, ap^4 l' ultimo termine ap^4 è uguale al primo termine a moltiplicato per la potenza p^4, il cui grado 4 è uguale al numero de' termini 5 meno uno.

310. PROBLEMA. *Trovar la somma d' una progressione geometrica.*

Sia la progressione geometrica ascendente 2. 4. 8. 16. 32. Dico: $4 - 2$ è a 2, come $32 - 2$ è alla somma de' termini, che precedono 32 (*N.*304.): ma $4 - 2 = 2$, e $32 - 2 = 30$; onde io ho 2. 2 : : 30. 30; ed in conseguenza 30 è la somma di tutt' i termini meno l' ultimo : quindi, giugnendo a questa somma l' ultimo termine 32, l' aggregato 62 è la somma della progressione; dal che apparisce, che quando l' Esponente è 2, l' ultimo termine meno 'l primo è uguale alla somma de' termini, che lo precedono.

Se la progressione fosse stata 1. 3. 9. 27. 81, avrei trovato,

facendo $3 - 1$ è ad 1, come $81 - 1$ è alla somma de' termini, che precedon l'ultimo, che 'l ultimo termine meno 'l primo d'una progressione, il cui esponente sia 3, è doppio della somma de' termini, che lo precedono; e se l'Esponente fosse 4, avrei trovato, che l'ultimo termine meno 'l primo è triplo della somma de' termini, che lo precedono; e così successivamente.

311. Sia la progression geometrica discendente 32. 16. 8. 4. 2: la piglio a rovescio, ed ho la progressione ascendente 2. 4. 8. 16. 32, di cui ne cerco, come prima, la somma; e perchè tanto vale dir $4 - 2$ è a 2, ovvero $32 - 16$ è a 16, come $32 - 2$ è alla somma de' termini, che lo precedono; faccio la regola del tre in quest'ultima maniera, e trovo come prima, che la somma de' termini, che procedon l'ultimo, è 30. Ciò mi fa comprendere, che se non voglio pigliar la progressione discendente a rovescio debbo dire: *Il primo termine 32 meno 'l secondo 16 è al secondo 16, come 'l primo 32 meno l'ultimo 2 è alla somma de' termini, che succedono al primo 32*; il che può servir di regola generale per le progressioni discendenti, che non si vogliono pigliare a rovescio. (*a*)

312. Se

(a) Nota. *La regola data quì sopra per la somma delle progressioni geometriche ascendenti serve anche per le discendenti, ne occorrono perciò due diverse regole. In fatti, se volendo sommar la progressione discendente* ∴ 81. 27, 9. 3. 1 *faccio* $27 - 81 . 81 : : 1 - 81 . n$, *cioè* $- 54 . 81 : : - 80 . 120$, *il quarto termine* 120 *sarà la somma della progressione, l'ultimo eccettuato.*

Ciò posto, si cerchi una formula generale, per cui si possano agevolmente sommar tutte le progressioni.

Sia a *il primo termine*, n *il numero de' termini*, e b *l'esponente, cioè 'l secondo termine diviso per lo primo. Pel n°.* 309 ab^{n-1} *sarà l'ultimo termine. Perciò* $ab - a . a : : ab^{n-1} - a . \frac{a^2b^{n-1} - a^2}{ab - a} = \frac{ab^{n-1} - a}{b - 1}$; ed $\frac{ab^{n-1} - a}{b - 1}$ *sarà uguale alla somma della progressione, meno l'ultimo termine. Si faccia dunque* $\frac{ab^{n-1} - a}{b - 1} + ab^{n-1}$, *e s'avrà la somma di tutta la progressione: Ora, riduco la quantità* ab^{n-1} *al denominator* $b - 1$ *moltiplicandola per esso; ed avrò* $ab^{n-1} =$

ab

312. Se la progreſſion geometrica diſcendente ſi ſtendeſſe all' infinito, l'ultimo termine diverrebbe infinitamente picciolo, e potrebbeſi reputare uguale a zero; ed in conſeguenza s'avrà, il primo termine meno 'l ſecondo è al ſecondo, come 'l primo men l'ultimo, ch'è zero, cioè come 'l primo è alla ſomma de' termini, che li ſuccedono; onde, ſupponendo che la progreſſione ſia $\because 1 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{4} \,.\, \frac{1}{8} \,.\, \frac{1}{16} \,.\, \frac{1}{32}$, ec. $\frac{1}{2^{\infty}}$ fino all' ultimo termine, che ſarà uno diviſo dalla potenza infinita dell'Eſponente 2, e per conſeguenza uno infinitamente picciolo, a cagione che tanto più una frazione minora, quanto più creſce il ſuo denominatore, e finalmente diventa uguale a zero, ſe'l denominatore è infinito, avremo $1 - \frac{1}{2}$ è a $\frac{1}{2}$, come 1 è alla ſomma de' termini, che ſuccedono al primo; e perchè $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, troveremo che 'l numero infinito de' termini, che ſuccedono al primo 1, non vale che uno; e però la ſomma intera della progreſſione è 2.

Troveremo nella ſteſſa maniera, che ſe la progreſſione foſſe $\because 1 \,.\, \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{9} \,.\, \frac{1}{27}$, ed $\frac{1}{3^{\infty}}$, la ſomma de' termini, che ſuccedono al primo, ſarebbe uguale ad $\frac{1}{2}$, cioè alla metà del primo termine; che ſe la progreſſione foſſe $\because 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$, ec. $\frac{1}{4^{\infty}}$, la ſomma de' termini, che precedon l'ultimo, ſarebbe $\frac{1}{3}$, cioè 'l terzo del primo

Z 2 mo

$\frac{ab^n - ab^{n-1}}{b-1}$, *e quindi* $\frac{ab^{n-1} + ab^n - ab^{n-1} - a}{b-1}$, *cioè* $\frac{ab^n - a}{b-1}$; *uguale alla ſomma di tutta la progreſſione: ed* $\frac{ab^n - a}{b-1}$ *ſarà la formula ricercata.*

TEOREMA. Siccome $ab^n = ab^{n-1} \times b$, cioè 1 uguale all'ultimo termine moltiplicato per l'eſponente; così s'avrà la ſomma della progreſſion geometrica, moltiplicando l'ultimo termine di eſſa per l'eſponente, ſottraendo da queſto prodotto il primo termine, e dividendo 'l reſiduo per l'eſponente ſteſſo diminuito dell'unità.

Sia la progreſſione aſcendente 3 . 9 . 27 . 81. *La quantità* $\frac{81 \,.\, 3 - 3}{3-1} = \frac{243 - 3}{2} = 120$ *ſarà la ſomma di tutta la progreſſione.*

Che s'ella foſſe diſcendente, cioè 81 . 27 . 9 . 3, *l'eſponente di eſſa ſarebbe* $\frac{1}{3}$. *Perciò la quantità* $\frac{3 \cdot \frac{1}{3} - 81}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1 - 81}{-\frac{2}{3}} = \frac{240}{2} = 120$ *ſarebbe la ſomma della progreſſione. Ciò che ſi avea a dimoſtrare.*

mo termine; e così a mano a mano. Dal che ne risulta, ch' ogni progressione discendente composta d'un numero infinito di termini è uguale ad una grandezza finita, se pure il suo primo termine non è infinito.

313. Quanto sia alle progressioni geometriche ascendenti, è evidente, che 'l lor valore è infinito. Se, per esempio, la progressione è $\because$ 1. 2. 4. 8. 16, ec. 2^{∞}, la somma de' termini, che precedon l'ultimo, sarà uguale a $2^{\infty} - 1$ (*N.* 310.), ed in conseguenza la somma totale sarà $2 \times 2^{\infty} - 1$. Similmente, se la progressiane è $\because$ 1. 3. 9. 27. 81, ec. 3^{∞}, la somma de' termini, che precedon l'ultimo, sarà $\frac{1}{2} \times 3^{\infty} - \frac{1}{2}$, e la somma totale sarà $\frac{3}{2} \times 3^{\infty} - \frac{1}{2}$; e se la progressione è $\because$ 1. 4. 16. 64, ec. 4^{∞}, la somma de' termini, che precedon l'ultimo, è $\frac{1}{3} \times 4^{\infty} - \frac{1}{3}$, e la somma totale è $\frac{4}{3} \times 4^{\infty} - \frac{1}{3}$; e così successivamente.

314. Che se a queste progressioni ascendenti infinite sommansi le discendenti, talmente che per la prima s'abbia $\frac{1}{2^{\infty}}$, ec. $\frac{1}{32} . \frac{1}{16} . \frac{1}{8} . \frac{1}{4} . \frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16, ec. 2^{∞}, la serie delle frazioni $\frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8}$, ec. sarà 1 (*N.* 310.); e perchè la serie 1. 2. 4. 8, ec. è $2 \times 2^{\infty} - 1$, unendo insieme questi due valori, la somma totale sarà $2 \times 2^{\infty} - 1 + 1$, ovvero $2 \times 2^{\infty}$. Similmente, se la progressione è $\frac{1}{3^{\infty}}$ ec $\frac{1}{81} . \frac{1}{27} . \frac{1}{9} . \frac{1}{3}$. 1. 3. 9. 27. 81, ec. 3^{∞}, la serie delle frazioni $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$, ec. sarà $\frac{1}{2}$, e quella de' termini 1. 3. 9. 27, ec. è $\frac{1}{2} \times 3^{\infty} - \frac{1}{2}$; e giugnendo insieme questi due valori, la somma totale sarà $\frac{1}{2} \times 3^{\infty}$, $- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, ovvero $\frac{1}{2} \times 3^{\infty}$, e così a mano a mano.

315. TEOREMA. *Tutte le potenze d' una grandezza sono in proporzion geometrica.*

Sia la serie delle potenze $a . a^{2} . a^{3} . a^{4} . a^{5} . a^{6}$, ec. S'io divido la seconda per la prima, il quoziente è a: se divido la terza per la seconda, l'Esponente è ancora a; e così a mano a mano; onde, perchè l'Esponente d'una potenza all' altra è sempre l' istesso, esse sono in progression geometrica. Sia altresì la serie $a^{0} . a^{-1} . a^{-2} . a^{-3} . a^{-4}$, ec. simile a questa $1 . \frac{1}{a} . \frac{1}{aa} . \frac{1}{a^{3}} . \frac{1}{a^{4}}$, ec. (*N.* 161.), i cui termini van diminuendo: s'io divido 'l primo termine a^{0} pel secondo a^{-1} servendomi del calcolo degli esponenti, il quoziente, o l' esponente de' due termini sarà a^{1}; e se divido 'l secondo a^{-1} pel terzo a^{-2}, il quoziente sarà ancora a^{1}; e così degli altri. Dunque le potenze saranno in progressione.

316. Conviene osservare, che mentre le potenze positive d' una gran-

grandezza $a^0 . a^1 . a^2 . a^3$, ec. sono in progression geometrica, i loro esponenti 0 . 1 . 2 . 3 . 4, ec. sono in progressione aritmetica positiva; e che mentre le sue potenze negative $a^{-1} . a^{-2} . a^{-3}$, ec. sono parimente in progression geometrica, i loro esponenti -1, -2, -3, -4, -5, ec. sono in progressione aritmetica negativa: tal che il termine zero trovasi fra la progressione positiva, e la negativa; e la progressione aritmetica totale è $-\infty$, ec. -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ec. ∞, il che faciliterà l'intelligenza de' *Logaritmi*.

CAPITOLO NONO.

Delle Ragioni composte.

317. SE si hanno due, o più ragioni a, b; c, d; e, f, e che si moltiplichino insieme tutti gli antecedenti, non meno che i loro conseguenti, i due prodotti ace, bdf formeranno un'altra ragione, la qual dicesi *composta* delle ragioni a, b; c, d; e, f, che sono *le componenti*.

318. Una Ragione composta di due Ragioni uguali chiamasi *duplicata* dell'una delle componenti; una composta di tre dicesi *triplicata* dell'una delle componenti; e così successivamente.

Onde le ragioni duplicate, triplicate, quadruplicate, ec. differiscono dalle duple, triple, quadruple, ec. e però non bisogna confonderle: imperocchè la ragion dupla è una ragione, il cui antecedente è doppio del conseguente (*N.* 274.); ed una ragion duplicata è una ragione composta di due ragioni uguali.

319. Ho detto (*N.* 238.), che l'esponente d'una Ragione è 'l quoziente della division del termine maggior pel minore, tanto se questo termine è'l primo della ragione, come se è l'ultimo; imperocchè, quando 'l primo termine è maggiore, il quoziente della divisione esprime quante volte il primo contiene 'l secondo; e quando è maggior l'ultimo, il quozient'esprime quante volte'l primo è contenuto nel secondo. Ora s'osservi, che potrebbesi anche chiamare *esponente* il quoziente del primo termine diviso pel secondo, sia il primo maggiore, o minor dell'altro; perciocchè, quando 'l primo termine è minore, il quoziente del primo diviso pel secondo è una frazione, la qual' esprime, ch'essendo 'l primo termine minore, egli è contenuto nel se-

ſecondo. Ma per togliere ogni equivoco dalla parola d'*Eſponente* chiamerò ſempre con tal nome il quoziente della diviſione del termine maggior pel minore, ed *eſpoſitore* chiamerò 'l quoziente del primo termine diviſo pel ſecondo, il quale non differirà dall'eſponente, ſe non quando 'l primo termine ſarà minore: ed egli è manifeſto, l'eſpoſitore moltiplicato pel ſecondo termine ſarà ſempre nell'uno e nell'altro caſo uguale al primo; perocchè, ſuppoſto che la Ragion ſia 4, 2, l'*eſpoſitor* ſarà 2; e in conſeguenza, moltiplicando l'ultimo termine 2 pel quoziente, od eſpoſitor 2, il prodotto 4 ſarà uguale al primo. Similmente, ſe la Ragione è 2, 4, l'eſpoſitor ſarà $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$; e l'ultimo termine 4 moltiplicato per $\frac{1}{2}$ darà 'l prodotto 2 uguale al primo termine, ec.

320. TEOREMA. *In ogni Ragion compoſta l'Eſpoſitore è uguale al prodotto degli Eſpoſitori delle Ragioni componenti.*

a, b; c, d ſieno le Ragioni, p ſia l'eſpoſitor della prima, e q quel della ſeconda; dunque la ragion compoſta ſarà ac, bd (*N.* 317.). Ora, nella prima Ragione noi abbiamo $a = bp$ (*N.* 319.), e nella ſeconda $c = dq$; onde, mettendo queſti valori di a e c nella Ragion compoſta, avremo $bpdq$, bd; e in conſeguenza, dividendo 'l primo per l'ultimo termine, l'eſpoſitor ſarà pq, cioè 'l prodotto degli eſpoſitori p, q delle ragioni componenti.

Sieno parimente a, b; c, d; f, h le tre Ragioni componenti; p ſia l'eſponente della prima, q quel della ſeconda, ed m quello della terza; dunque la Ragion compoſta ſarà acf, bdh: ora, nella prima ragione io ho $a = bp$, nella ſeconda $c = dq$, e nella terza ho $f = mh$; onde, mettendo queſti valori di a, c, f nella Ragion compoſta acf, bdh avrò $bpdqmh$, bdh; e dividendo 'l primo pel ſecondo termine, l'eſpoſitor ſarà pqm, il qual'è prodotto dai tre eſpoſitori p, q, m; e così degli altri.

321. Queſto Teorema ſarebbe generale, quando anche ſi trovaſſero delle Ragioni componenti, le quali aveſſero i loro antecedenti maggiori dei lor conſeguenti, ed altri loro conſeguenti maggiori degli antecedenti; ne io avrei potuto renderlo così generale, ſe mi foſſi ſervito degli eſponenti, in vece degli eſpoſitori. Imperocchè, ſien le Ragioni componenti 4, 1, 1, 3; l'eſpoſitor della prima è 4, e quel della ſeconda è $\frac{1}{3}$; e la Ragion compoſta è 4, 3, il cui eſpoſitor $\frac{4}{3}$ è uguale al prodotto degli eſpoſitori 4, $\frac{1}{3}$ delle Ragioni componenti. Ma s'io aveſſi preſo gli eſponenti 4 e 3 delle ragioni componenti, l'eſponente $\frac{4}{3}$ della ragione compoſta non ſa-

rebbe

rebbe stato uguale al prodotto degli Esponenti 4, e 3; e però 'l Teorema non sarebbesi esteso a questo caso.

322. TEOREMA. *L' espositore d'una Ragion composta di due Ragioni uguali è uguale al quadrato dell' espositor dell' una delle componenti; quello d' una ragion composta di tre Ragioni uguali è uguale al cubo dell' espositore dell' una delle componenti; quello d' una ragion composta di quattro ragioni uguali è uguale alla quarta potenza dell' espositore dell' una dell' uguali; e così successivamente.*

Sien le due ragioni a, b : : c, d; dunque l' espositor p della prima sarà uguale all' espositore della seconda; e però noi avremo $d = bp$, e $c = dp$. Ora, la ragion composta è ac, bd; onde, mettendo nella ragione composta i valori di a, e c, avremo $bpdp$, bd, e dividendo 'l primo pel secondo termine, l' espositore pp sarà 'l quadro dell' espositor p della prima, o seconda Ragion componente.

Sieno parimente le tre Ragioni uguali a, b : : c, d : : f, b, e l' espositor di ciascuna di loro sia p; dunque noi avremo $a = bp$, $c = dp$, ed $f = bp$. Ora, la ragione composta è acf, bdb; onde, mettendo i valori di a, c, f, avremo $bpdpbp$, bdb, e dividendo 'l primo pel secondo termine, l' espositor ppp sarà 'l cubo dell' espositor della prima, o seconda, o terza ragion componente; il che sarebbe altresì facile a provarsi in se le Ragioni fossero composte di più Ragioni uguali.

323. TEOREMA. *I quadrati sono in Ragion duplicata della Ragione delle lor radici, i cubi in Ragione triplicata, le quarte potenze in Ragion quadruplicata, e così successivamente.*

Sieno i quadrati aa, bb, le cui radici sono a, b; piglio le due Ragioni uguali a, b : : a, b; e la composta di queste due Ragioni è la duplicata aa, bb: ora, i termini di questa Ragion duplicata sono i quadrati de' termini a, b dell' una, o dell' altra delle componenti; onde i quadrati aa, bb sono in Ragion duplicata della Ragione delle lor radici.

Sien parimente i cubi a^3, b^3, le cui radici sono a, b; piglio le tre Ragioni uguali a, b : : a, b : : a, b; e la composta di queste tre Ragioni è a^3, b^3, la qual' è triplicata della prima, o seconda, o terza: ora, i termini a^3, b^3 sono i cubi de' termini a, b delle tre componenti; onde i cubi sono in ragione triplicata della ragione delle lor radici; e così dell' altre potenze.

324. COROLLARIO. Quindi ne segue, che le radici quadre sono

sono in ragion sudduplicata di quella de' loro quadri, che le cube sono in ragione suttriplicata di quella de' loro cubi, ec.

325. TEOREMA. *Date più grandezze in successione, la prima è alla terza in ragion composta della ragione della prima alla seconda, e di quella della seconda alla terza; la quarta è in ragion composta della ragione della prima alla seconda, di quella della seconda alla terza, e di quella della terza alla quarta; e così a mano a mano: tal che la ragione d'un termine ad un'altro è composta di tutte le ragion' interposte.*

Sieno le grandezze a, b, c, d, e, ec. od altre ad arbitrio, le quali vadano o crescendo, o diminuendo, o talora crescendo, e talora diminuendo: piglio le due ragioni a, b; b, c; e facendo la ragion composta, ho ab, bc; e dividendo amendue i termini per b, i quozienti a, c sono nella ragion medesima di ab, bc (*N.* 33.): onde $a . c :: ab . bc$; e però la prima grandezza data è alla terza c in ragion composta della ragione delle due prime a, b, e di quella della seconda b alla terza c.

Piglio parimente le tre ragioni a, b; b, c; c, d; e la lor ragione composta è abc, bcd: ora, essendo i suoi due termini divisi per bc, ci danno a, d, che sono ancora nella stessa ragione di abc bcd; dunque $a . d :: abc . bcd$, cioè la prima grandezza data a è alla quarta d in ragion composta delle ragion' interposte a, b; b, c; c, d; e così dell'altre.

326. COROLLARIO. L'istesso ancora sarebbe, se le date grandezze a, b, c, d, e, ec. fossero in progression geometrica ascendente, o discendente.

327. TEOREMA. *In ogni Progressione geometrica ascendente, o discendente, il primo termine è al terzo, come 'l quadrato del primo è al quadrato del secondo; il primo è al quarto, come 'l cubo del primo è al cubo del secondo; il primo è al quinto, come la quarta potenza del primo è alla quarta potenza del secondo; e così degli altri.*

Sia la progressione :: a, b, c, d, e, ec. pel Teorema precedente, il primo termine a è al terzo c in ragion composta delle ragioni a, b, e b, c: ma queste due ragioni sono uguali; onde 'l primo termine a è al terzo c in ragion duplicata delle ragioni a, b, o b, c (*N.* 318.): ora, la ragion duplicata dell'una delle componenti è uguale alla ragione dei quadrati de' termini dell' una delle componenti (*N.* 323.); dunque la ragione a, c è uguale alla ragion dei quadrati de' due primi termini a, b della progressione.

Così

Così pure, per lo precedente Teorema, la ragione a, d è composta delle ragioni a, b; b, c; c, d: ora, queste tre ragioni sono uguali; dunque la ragione a, d è triplicata della ragione a, b. Ma i cubi della ragione a, b sono parimente in ragion triplicata della ragione a, b (*N.* 323.); onde'l primo termine a della progressione è al quarto d, come'l cubo a^3 del primo è al cubo b^3 del secondo; e così ec.

328. TEOREMA. *Data una Progressione geometrica ascendente o discendente, le seconde, terze, o quarte potenze de' suoi termini, come altresì le lor radici quadrate, cube, o quarte, ec. saranno ancora in progressione.*

In ogni progression geometrica, la ragione del primo termine al secondo è uguale a quella del secondo al terzo, del terzo al quarto, ec. onde le ragioni duplicate, triplicate, quadruplicate, ec. o sia le ragioni sudduplicate, suttriplicate, suqquadruplicate, ec. di tutte queste ragioni sono ancora uguali: ora, i quadri di queste ragioni sono in ragion duplicata, i cubi in ragione triplicata, ec. e le radici quadre sono in ragion sudduplicata, le cube in ragione suttriplicata, ec. dunque le seconde, o terze potenze, ec. ovvero le radici quadre, o cube, ec. son nella stessa ragione fra loro; ed in conseguenza esse sono ancora in progressione.

329. TEOREMA. *Se due seconde, terze, o quarte potenze, ec. disuguali son divise l' una per l' altra, il quoziente è un numero quadrato, o un cubo, ec.*

Ciò risulta, è vero, da'precedenti principj, ma si può dimostrarlo con maggior chiarezza nel seguente modo. Sieno i quadrati aa, bb; s'io divido l' un per l' altro, il quoziente $\frac{aa}{bb}$ è ancora un quadro, perchè la sua radice è $\frac{a}{b}$. Sien parimente i cubi a^3, b^3; s'io divido l'uno per l'altro, il quoziente $\frac{a^3}{b^3}$ è ancora un cubo, perchè la sua radice cuba è $\frac{a}{b}$; e così dell' altre potenze.

330. PROBLEMA. *Fra due date grandezze trovare un numero di medie proporzionali geometriche ad arbitrio.*

Per trovare fra le due grandezze a, b una media proporzionale geometrica, chiamo x la media, ch'io cerco, ed ho $::$ a. x. b: ora, il quadrato della prima è a quel della seconda, come la prima alla terza (*N.* 327.); onde aa. xx. a. b; e facendo'l pro-

dotto degli estremi, e quello de' medj, trovo $aab = axx$; e dividendo amendue i prodotti per a, ho $ab = xx$, ed $x = \sqrt{ab}$: il che mi mostra, che per avere la media proporzionale x, siccome l'abbiamo trovata (*N.* 292.), si dee moltiplicare a per b, ed estrar la radice quadra dal prodotto.

Sieno a e b le due grandezze, e si proponga di trovar due medie proporzionali; chiamo x la prima, ed y la seconda; ed ho $\div\, a . x . y . b$: ora, il cubo della prima è a quel della seconda, come la prima alla quarta (*N.* 327.); onde $a^3 . x^3 :: a . b$: dal che io deduco $a^3b = ax^3$; e dividendo tutto per a, ho $a^2b = x^3$; ed estraendo la radice cuba, trovo $x = \sqrt[3]{a^2b}$: il che mi mostra, che per trovar la prima delle due medie proporzionali, conviene fare il quadrato della prima a, moltiplicarlo per la quarta b, ed estrarne la radice cuba dal prodotto. Quindi, perchè i quattro termini sono in progressione, si dirà: la prima a è alla seconda x, che sarà una grandezza nota, come questa seconda è alla terza; e la Regola del Tre ci darà la terza.

Similmente fra due date grandezze si troverebbero tre medie proporzionali, quattro, cinque, ec.

331. AVVERTIMENTO. Talora succede, che non si possono esprimere in numeri le medie proporzionali, che si cercano farem vedere nel susseguente Capitolo quando ciò sia impossibile.

332. TEOREMA. *Fra due quadri perfetti troverem sempre una media proporzionale da potersi esprimere in numero; fra due cubi perfetti ne troverem due; fra due quarte potenze perfette ne troveremo tre; e così successivamente.*

Sieno i due quadri perfetti aa, bb; li moltiplico insieme, ed ho $aabb$, la cui radice quadra ab è media proporzionale fra i due quadrati aa, bb, perocchè 'l suo quadro è uguale al prodotto de' due quadri, che sono i suoi estremi (*N.* 330.); onde io ho $\div\, aa . ab . bb$: il che significa, che *'l prodotto delle radici di due quadrati è medio proporzionale fra questi due quadri.*

Per rinvenire fra due cubi a^3, b^3 due medie proporzionali, moltiplico le lor radici a, b, ciascuna pel quadro aa, ed ho i prodotti a^3, a^2b, che son nella stessa ragione delle radici a, b (*N.* 32.); moltiplico le stesse pel quadro della seconda, ed ho i prodotti abb, b^3, che sono ancora nella medesima ragione; ond' essendo le due ragioni a^3, a^2b, ed abb, b^3, uguali ciascuna alla ragione a, b, sono fra loro uguali; e però $a^3 , a^2b :: abb . b^3$. Ora, per provare che non solamente queste quattro grandezze sono proporzio-

nali,

nali, ma che sono anche in proporzion continua, moltiplico la prima a^3 per la terza abb, e'l prodotto è a^4bb, la cui radice quadra è a^2b; ed in conseguenza la grandezza a^2b è media proporzionale fra le grandezze a^3b, ed abb: moltiplico similmente il secondo termine a^2b pel quarto b^3, e 'l prodotto è a^2b^4, la cui radice quadra è abb; e per conseguente abb è media proporzionale fra i termini a^2b, e b^3; ed i quattro termini a^3, a^2b, abb, b^3 sono in proporzion continua.

Per rinvenire fra due quarte potenze a^4, b^4 tre medie proporzionali, moltiplico le lor radici a, b pel cubo della prima, ed i prodotti a^4, a^3b son nella medesima ragione; moltiplico le stesse per aab, ed i prodotti a^3b, $aabb$ sono ancora nella medesima ragione; le moltiplico per abb, ed i prodotti $aabb$, ab^3 son nella stessa ragione; finalmente le moltiplico per b^3, ed i prodotti ab^3, b^4 sono ancora nella medesima ragione; onde io ho la proporzion continua a^4, a^3b : : a^3b. $aabb$: : $aabb$. ab^3 : : ab^3. b^4: e si troverà nella stessa maniera, che fra due quinte potenze perfette vi son quattro medie proporzionali, ec.

Se innalzasi un binomio $a + b$ alle sue potenze, e che trascurins' i coefficienti numerici, si troverà, che i termini compresi fra le più alte potenze di a e b sono le medie geometriche, de' quali abbiam parlato.

Delle Regole dagli Aritmetici dette del cinque, del sette, del nove, ec.

533. Quando in una quistione proposta, la quale contiene cinque grandezze note, se ne cerca una sesta, e che le cinque possan ridursi a tre, in maniera che per una regola del Tre si possa trovar la sesta, dicono gli Aritmetici esser questa una Regola del cinque; siccome dicono essere una Regola del sette, quando in una questione, la quale contiene sette grandezze note, se ne cerca un' ottava, e che le sette possan ridursi a tre, in modo che per una Regola del Tre si possa trovar l' ottava; e così dell' altre: ora, quello ch' essi insegnano è fondato sopra i principj delle ragioni composte, come chiaramente apparisce dal seguent' esempio.

ESEMPIO. *Due uomini in tre giorni han fatto* 24 *pertiche di lavoro, quante in* 9 *giorni ne faranno quattr' uomini?*

Dicono gli Aritmetici, che per risolvere questo problema è necessario moltiplicare insieme i due primi termini 2, e 3, il che

fa 6; indi il quarto, e 'l quinto, il che fa 36; finalmente dicono, che convien fare una regola del Tre; il cui primo termine sia 'l prodotto 6, il secondo il numero 24 delle pertiche, e 'l terzo il prodotto 36: Sicchè, per la regola, io trovo, che 'l quarto termine 144 sarà 'l numero delle pertiche, che quattr'uomini farebbero in nove giorni.

6. 24 : : 36. 144

24
36
144
72
864

6. 864(144
26
24

La proporzion dunque secondo gli Aritmetici è 6. 24 : : 36. 144, ovvero alternando, 6. 36 : : 24. 144; cioè, il prodotto 6 del numero 2 degli uomini moltiplicato pel numero 3 de' loro giorni è al prodotto 36 del numero degli uomini 4 moltiplicato pe' loro giorni 9, come le 24 pertiche fatte da due uomini in 3 giorni sono alle 144 fatte da 4 uomini in 9.

Ora, per rendere di ciò ragione, non si ha che far osservare, che 'l numero 24 di pertiche è al numero di pertiche 144 in ragione non solo del numero 2 al numero 4 d' uomini, ma anche del numero 3 di giorni al numero 9; ed in conseguenza 24 è a 144 in ragion composta dei numeri 2 e 4 d' uomini, e de' numeri 3 e 9 di giorni: ora, la ragion composta di queste due ragioni è 2 × 3, e 4 × 9, ovvero 6, e 36; e i termini di questa ragione sono i prodotti dei numeri d' uomini pe' loro giorni; dunque, ec.

Ma per restarne maggiormente convinti si rifletta, che due uomini in tre giorni fan tanto lavoro, quanto 2 volte 3 uomini, o 6 fanno in uno; e che 4 uomini in 9 giorni ne fan tanto, quanto 4 volte 9 uomini, o 36 ne fanno parimente in uno. Quindi la questione proposta è simile alla seguente: se 6 uomini han fatto 24 pertiche, quante ne faranno 36? il ch' è una regola del Tre ordinaria.

Ciò basta per far conoscere la maniera di ridurre a tre termini le questioni di 7, di 9, di 11, ec. nulla dunque io soggiugnerò a tal proposito.

GA-

CAPITOLO DECIMO.

Dell' Incommensurabili.

334. Quelle grandezze sono *fra loro commensurabili*, il cui rapporto può esprimersi in numeri, imperocch' egli si potrà trovare un numero, che le misuri. Il rapporto di 4 a 2 è 2; onde queste due grandezze son commensurabili, perocchè 'l numero 2 misura se stesso, e 'l 4, in cui è contenuto due volte: similmente, il rapporto di 5 a 3 è commensurabile, perciocchè tutti due i numeri vengon misurati dall' unità, la quale contiensi cinque volte in 5, e tre volte in 3, ec.

335. Quelle grandezze poi, il cui rapporto non può esprimersi in numeri, diconsi *fra lore incommensurabili*; così le grandezze 2 e $\sqrt{3}$ sono incommensurabili, perchè non può esprimersi ciò che 2 è a $\sqrt{3}$, ec.

336. Se due grandezze, che sono fra loro d' incommensurabili, divengon commensurabili coll' innalzarle al quadrato, si dice, ch' esse sono *incommensurabili fra loro, e commensurabili in potenza*. Le grandezze 2 e $\sqrt{3}$ son commensurabili in potenza, perciocchè i lor quadrati sono fra loro, come due numeri; e se queste grandezze non sono commensurabili se non quando s' innalzano al cubo, si dice, che sono *incommensurabili fra loro ed in potenza, e commensurabili in terza potenza*, ec.

337. TEOREMA. *Se l' espositore, o 'l esponente d' una ragione duplicata non è un quadrato, ovvero, se quel d' una ragione triplicata non è un cubo, i termini delle ragioni semplici, di cui queste ragioni son duplicate, o triplicate, saranno fra loro incommensurabili. Ma se l' espositore, o l' esponente d' una ragione è un numero quadrato, od un cubo, ec. i termini della ragion saranno fra loro, come due quadrati, o come due cubi, ec.*

La prima parte di questo Teorema è per se facile dopo le cose premesse; e per la seconda, supponiam la ragione 2, 8, il cui espositore $\frac{1}{4}$, e l' esponente 4 son numeri quadri: ora, amendue essi fan vedere, che 2 è 'l quarto di 8; onde 2 . 8 : : 1 . 4: ma 1 e 4 son numeri quadri; dunque i termini 2 e 8 sono fra loro, come numeri quadrati.

Sia parimente la ragione 16, 54, il cui espositore $\frac{16}{54}$, che ridotto a minori termini è $\frac{8}{27}$, e l' esponente $\frac{54}{16}$, ovvero $\frac{27}{8}$ son numeri cubi, perchè la radice cuba di 8 è 2, e quella di 27 è 3: ora, amendue essi ci mostrano, che 16. 54 : : 8. 27; onde i termini 16 e 54 sono fra loro, come numeri cubi; e così degli altri.

338. TEOREMA. *In ogni progression geometrica ascendente, o discendente, il primo termine è commensurabile al secondo, se l'espositor della ragione del primo al terzo è un quadrato, se quel della ragion del primo al quarto è un numero cubo, se quello della ragione del primo al quinto è la quarta potenza d' un numero, ec.*

Sia la proporzion geometrica : : a, b, c, d, e, f, ec. la ragione del primo termine a al terzo c è composta delle ragioni a, b, e, b, c (*N.* 325.): ora, queste due componenti sono uguali, perchè sono in progressione; dunque la ragion del primo al terzo è duplicata della ragione a, b (*N.* 318.), ed in conseguenza il suo espositore è 'l quadrato dell' espositor della ragione a, b: ma per ipotesi quest' espositore è un numero quadro; onde si potrà estrarne la sua radice per avere l' espositor della componente a, b, e quindi conoscere il rapporto del primo termine a al secondo b.

Similmente, la ragione del primo termine a al quarto d è composta delle tre ragioni uguali a, b; b, c; c, d; ed in conseguenza ell'è triplicata della ragione a, b: ora, l'espositor d'una ragione triplicata è'l cubo dell'espositore dell'una delle componenti; onde, estraendo la radice cuba dall'espositor della ragione a, d, il quale per ipotesi è un numero cubo, detta radice sarà l' espositor della ragione a, b, ed esprimerà la ragion del primo al secondo; e così degli altri.

339. TEOREMA. *In ogni progression geometrica, il primo e'l secondo termine sono incommensurabili fra loro, e commensurabili in potenza, se l' espositor della ragione del primo al terzo non è un numero quadrato; e sono incommensurabili fra loro, ed in potenza, se l' espositore del primo al terzo non è un numero, che si possa esprimere.*

Sia la progressione : : a, b, c, d, e, ec. poichè per ipotesi l' espositore del primo termine a al terzo c non è un numero quadro, non si potrà estrarne la radice: ora, l' espositor del primo al secondo è uguale a questa radice; e perchè quest' espositore

re

re non potrà esprimersi in numero, i termini a, b saranno incommensurabili: ma i quadrati di questi termini saran commensurabili; perocch'essendo questi quadri in ragion duplicata della ragione a, b, essi saranno nella stessa ragione de' termini a, c, che sono altresì in ragion duplicata della ragione a, b; onde l'espositore di questi quadrati sarà uguale all'espositor de' termini a, c: e siccome per ipotesi quest'espositore è un numero; così si potrà conoscer la ragione de' quadrati.

Che se per ipotesi l'espositor della ragione a, c non può esprimers' in numero, non potrà ne meno esprimersi la ragion dei quadrati della ragione a, b; perciocch'essendo il loro espositore uguale a quel della ragione a, c, egli non potrà farci conoscere i lor rapporti; e però i due primi termini a, b saranno incommensurabili fra loro, ed in potenza.

340. TEOREMA. *In ogni progression geometrica, il primo e'l secondo termine saranno incommensurabili fra loro, e commensurabili in terza potenza, se l'espositore del primo al quarto non è un cubo; e saranno incommensurabili fra loro, ed in terza potenza, se l'espositor del primo al quarto è un numero, che non si possa esprimere.*

La ragion del primo al quarto termine è triplicata della ragione del primo al secondo, ed in conseguenza il suo espositore è'l cubo dell'espositor del primo al secondo; onde, poichè per ipotesi quest' espositore non è un cubo, da cui si possa estrarne la radice, non si potrà ne meno trovar l'espositore de' due primi termini: ma i cubi di questi termini saran commensurabili; perciocch' essendo gli stessi in ragione triplicata delle lor radici, saranno fra loro, come'l primo e'l quarto termine, che sono commensurabili, perchè il loro espositore è un numero: che se quest'espositor non fosse un numero, è evidente, che non lo sarebbe ne men quello dei cubi de' due primi termini; e però i due primi termini sarebbero incommensurabili fra loro, ed in terza potenza.

Troveremo con simile discorso, che se l'espositore del primo al quinto non è una quarta potenza, il primo e'l secondo termine sono incommensurabili fra loro, e commensurabili in quarta potenza; e che se quest'espositor non è un numero, il primo e'l quarto sono incommensurabili in quarta potenza; e così degli altri.

342. Conviene osservare, che se l'espositor del primo al quarto non è un cubo, il secondo e'l terzo sono radicali. Sieno, per esempio, il primo e'l quarto termine 1 e 6; chiamo x. y i due medj, ed ho $::1. x. y. 6$; ed in conseguenza $1. x^3 :: 1. 6$. (N.330.);

(*N.* 330.) ; dal che io deduco $x^3 = 6$, ed $x = \sqrt[3]{6}$; così 'l ſecondo termine è $\sqrt[3]{6}$: ora, per avere il terzo, dico : $1 . \sqrt[3]{6} :: \sqrt[3]{6} . \sqrt[3]{36}$; e queſto terzo è la grandezza incommenſurabile $\sqrt[3]{36}$.

Similmente, ſe l'eſpoſitor del primo al quinto non è una quarta potenza, i tre termini, che ſono a'l primo e'l quinto, ſono grandezze radicali. Sieno, per eſempio, il primo e'l quinto termine 2 ed 8 ; chiamo x, y, z i tre medj, ed ho $\because 2 . x . y . z . 8$; ed in conſeguenza $16 . x^4 :: 2 . 8$. (*N.* 330.) ; dal che io deduco $x^4 = \frac{16 \times 8}{2}$, ed $x = \sqrt[4]{64}$; così 'l ſecondo termine è $\sqrt[4]{64}$: ora, per avere il terzo, dico : $2 . \sqrt[4]{64} :: \sqrt[4]{64} . \frac{\sqrt[4]{64 \times 64}}{2}$, e'l terzo termine è $\frac{\sqrt[4]{64 \times 64}}{2}$; e per avere il quarto, dico : $2 . \sqrt[4]{64} :: \frac{\sqrt[4]{64 \times 64}}{2} . \frac{\sqrt[4]{64 \times 64 \times 64}}{4}$, e queſto quarto termine è incommenſurabile non meno che i precedenti.

Si proverà nella ſteſſa maniera, che ſe l' eſpoſitor del primo al ſeſto non è una quinta potenza, i termini compreſi fra'l primo e'l ſeſto ſaranno incommenſurabili.

343. E quindi riſulta, che non ſi può fra due grandezze trovare una media proporzionale, che ſi poſſa eſprimere in numero, ſe non quando l'eſpoſitore di queſte grandezze è un quadrato ; che non ſe ne poſſono trovar due, ſe non quando l'eſpoſitore è un cubo ; tre, che quando l'eſpoſitore è una quarta potenza, ec. nondimeno tutte queſte medie proporzionali, che non ſi poſſon' eſprimere in numero, eſprimonſi agevolmente in linee mediante le regole della Geometria, come a ſuo luogo vedremo.

CAPITOLO UNDECIMO.

De' Logaritmi.

344. SE pigliaſi una progreſſion geometrica infinita aſcendente e diſcendente $\frac{1}{\infty}$, ec. $\frac{1}{32} . \frac{1}{16} . \frac{1}{8} . \frac{1}{4} . \frac{1}{2} . 1 . 2 . 4 . 8 . 16$.

16 . 32, ec. 2^{∞}, e che sotto i termini ascendenti 1 . 2 . 4, ec. scrivans' i positivi 0 . 1 . 2 . 3, ec. d' una progressione aritmetica ascendente, e sotto i termini $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$, ec. della progression geometrica si scrivan li negativi — 1, — 2, — 3, ec. della progressione aritmetica, ogni termine della progressione aritmetica si chiamerà 'l *Logaritmo* del termine della progression geometrica, sotto cui si troverà scritto: ora, le due progressioni saran le seguenti:

$\frac{1}{2^{\infty}}$, ec. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32, ec. 2^{∞} .
— ∞, ec. — 5 . — 4 . — 3 . — 2 . — 1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5, ec. ∞ .

345. Ho fatto notare (*N.* 316.), che la serie infinita delle potenze negative e positive d'una grandezza a, che sono $a^{-\infty}$, ec. a^{-6} . a^{-5} . a^{-4} . a^{-3} . a^{-2} . a^{-1} . a^{0} . a^{1} . a^{2} . a^{3} . a^{4}, ec. a^{∞} sono in progression geometrica; onde, facendo $a = 2$, questa serie di potenze letterali sarà uguale alla progression geometrica sopr' accennata, perciocchè a^{0} è uguale ad 1 (*N.* 159.); e le potenze negative a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, ec. sono uguali a queste $\frac{1}{a^{1}}$, $\frac{1}{a^{2}}$, $\frac{1}{a^{3}}$, e gli esponenti delle potenze letterali saranno uguali ai termini della progressione aritmetica da noi scritti sotto quelli della geometrica.

346. Quindi ne segue, che i logaritmi della progressione geometrica avran le stesse proprietà, che hanno gli esponenti delle potenze di a; così 1°. se voglio moltiplicare il termine 2 della progression geometrica pel termine 8, giugno i logaritmi 1, 3 di questi due termini, e la somma 4 sarà 'l logaritmo del prodotto cercato (*N.* 154.): Ora, il termine della progression geometrica scritto sopra 'l logaritmo 4 è 16; onde 16 è 'l prodotto di 2 per 8. 2°. Per dividere il termine 16 della progression geometrica pel termine 2, piglio i logaritmi 4 ed 1 di questi termini, e sottraendo 'l secondo dal primo, il residuo 3 è 'l logaritmo del quoziente cercato (*N.* 155.); onde 'l termine 8 scritto sopra 'l logaritmo 3 è 'l quoziente di 16 diviso per 2. 3°. Per innalzare il termine 2 della progression geometrica alla sua quarta potenza, moltiplico 'l logaritmo 1 del termine 2 per l'esponente 4 della quarta potenza di 2 (*N.* 156.), e 'l termine 16 scritto sopra 'l logaritmo 4 è la quarta potenza cercata. 4°. Per estrarre la radice cuba da 8, piglio 'l suo logaritmo 3, e dividendolo per l'esponente 3 della radice cuba, il quoziente 1 è 'l logaritmo della radice cuba di 8 (*N.* 157.); ed in conseguenza il termine scritto sopra questo logaritmo è la radice cercata; quindi vedesi, che quando s' opera

ſopra i termini della progreſſion geometrica, l'addizione e ſottrazion ſottentrano in luogo della moltiplicazione e diviſione; ſiccome la moltiplicazione e diviſion ſottentrano in quello dell'innalzamento delle potenze, e dell'eſtrazion delle radici ∴ Ora, perocchè l'addizione e ſottrazion ſono men difficili della moltiplicazione e diviſione, e perchè la moltiplicazione e diviſion ſono men difficili dell'innalzamento delle potenze e dell'eſtrazion delle radici, è manifeſto, che i logaritmi facilitan molto, ſpezialmente quando ſi tratta di calcoli lunghi, e dell'eſtrazione delle radici ſeconde, terze, quarte, ec.

347. Convien' oſſervare, che i logaritmi delle frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ſono gli ſteſſi dei logaritmi de' loro denominatori 2, 4, 8, ec. trattone che ſon negativi.

348. Siccome fra i termini d'una progreſſion geometrica trovanſi molti numeri, che non ſono in progreſſione, e che in conſeguenza non han logaritmi, il vantaggio, che ritrarrebbeſi dagli ſteſſi, ſarebbe limitato; ma ſi ha a ciò provveduto, cercando i logaritmi de' numeri naturali 1. 2. 3. 4, ec. in queſta maniera.

S' ha pigliato la progreſſion geometrica decimale : ∴ 1, 10, 100, 1000, 10000, ec. e perocchè, a fine di trovare i logaritmi de' numeri fra 1 e 10, ha fatto d'uopo eſtrar delle radici, come diremo, il ch'avrebbe ſenza dubbio dato dei reſidui dopo l'eſtrazione, ſi hanno accreſciuti tutt'i termini della loro progreſſione, ed i lor logaritmi di più zeri, per eſempio di 7, e la progreſſione in conſeguenza è divenuta 1.0000000, 10.0000000, ec. ed i loro logaritmi 0.0000000, 1.0000000, 2.0000000, ec. ſcrivendo un punto innanzi a queſti zeri per diſtinguere i logaritmi dagli zeri aggiunti; e chiamaſi *caratteriſtica* la cifera ſcritta innanzi a queſto punto ∴ così nel logaritmo 1.0000000 la cifera 1 diceſi la *caratteriſtica*, ec. dopo ciò, s'ha cercato 'l logaritmo di 9, o 9.0000000, pigliando fra i due termini 1 e 10 della progreſſion geometrica accreſciuti de' loro zeri una media proporzional geometrica, e nel tempo ſteſſo s'ha preſo una media aritmetica fra i lor logaritmi altresì accreſciuti de' loro zeri; e queſta media aritmetica è ſtata 'l logaritmo della media geometrica: ma per eſſere la media geometrica minor di 9, o 9.0000000, s' ha cercato un'altra media geometrica fra eſſa, e 'l termine 10, o 10.0000000, e nel tempo ſteſſo una media aritmetica fra 'l logaritmo della prima media geometrica, e quel di 10, ovvero di 10.0000000; e per eſſere anche queſta ſeconda media inferiore al 9,

ov-

ovvero a 9. 0000000, s'ha cercato un'altra media geometrica fra essa e'l numero 10, ed un'altra media aritmetica fra'l suo logaritmo e quello di 10; e trovata con tal metodo fra 9 e 10 una media geometrica, se n'ha pres'un'altra fra questa, e quella ch'è più prossima a 9; e ciò finattanto che s'ha trovato una media geometrica uguale a 9, e'l suo logaritmo.

Trovato'l logaritmo di 9, si hanno agevolmente trovati, mediante le regole quì sopra date, quello della sua radice 3, e quel delle potenze di 3: ma egli è stato mestiere cercar nella stessa guisa i logaritmi degli altri numeri fra 1 e 10, e quelli de' numeri fra 10 e 100, ec. la qual cosa è stata faticosissima; e però tenuti professar ci dobbiamo a coloro, che dati si sono a sì lodevole, ed utile impresa.

Trovati tutt'i logaritmi de'numeri 1. 2. 3. 4. 5, ec. si formò la Tavola dei logaritmi, scrivendo questi numeri in file gli uni sotto gli altri, coi lor logaritmi accanto; e questa nelle Tavole di M[r]. Ozanam, che sono le più comode, comincia dal logaritmo 1, e termina a quello di 10000; e quindi egli è facile a conoscere i logaritmi delle frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ec. fino a $\frac{1}{10000}$: ma siccome de'numeri vi sono oltre il 10000, e di più de'numeri interi fra 1 e 10000, che son composti d'interi e di frazioni, ed i cui logaritmi non sono nelle tavole, trattasi di trovare i lor logaritmi, egualmente che quelli delle frazioni, il cui numeratore è maggior dell'unità; ciò che noi vedremo ne' susseguenti problemi, ove insegneremo parimente a trovare a qual numero appartenga un logaritmo, che non sia nelle Tavole.

349. *Trovare il logaritmo del numero* 9477856.

Essendo questo numero maggiore di 10000, tolgo alcuni caratteri a sinistra, e ciò finattanto che i rimanenti si trovino nelle Tavole; ma sempre colla mira di levarne meno che sia possibile, imperocchè, in quanta minor copia sono i caratteri tolti, tanto più prossimi trovansi i rimanenti alla fine delle Tavole; in conseguenza di che il metodo, cui siam per servirci, divien'esattissimo, quantunque non assolutamente geometrico. Ne levo adunque i tre ultimi, ed i rimanenti sono 9477, il qual numero trovasi nelle Tavole: ma perocchè, sottraendo 856, il residuo è 9477000, cioè'l numero 9477 moltiplicato per 1000, piglio nella Tavola il logaritmo 3.9766709 di 9477, e v' aggiugno 'l logaritmo 3,0000000 di 1000; e la somma 6.9766709 è 'l logaritmo

Bb 2 del

del numero 9477000 (*N.* 346.) : ora, il numero proposto 9477856 è maggiore di 9477000, e minor di 9478000, perchè non supera 9477000 che di 856, là dove 9478000 lo supera di 1000; quindi io piglio nella tavola il logaritmo 3.9767167 del numero 9478, ed aggiugnendo ad esso il logaritmo 3.0000000 di 1000, la somma 6.9767167 è 'l logaritmo di 9478000 : così i logaritmi de' numeri 9477000 e 9478000, la cui differenza è 1000, sono 6.9766709, e 6.9767167; e la lor differenza è 458. Onde io dico: se la differenza 1000 de' numeri 9477000 e 9478000 dà 458 per la differenza de' loro logaritmi, cosa darà la differenza 856 de' numeri 9477000, e 9477856 per la differenza del loro? e per la Regola del Tre trovo 1000 . 458 : : 856. 392 : così la differenza cercata è 392 con un residuo, ch' io trascuro; perciocchè, essendo i logaritmi estremamente grandi, il loro ultimo carattere a destra può esser più, o meno grande, senza punto alterare il lor valore; di più ancora si potrebbero francamente togliere da tutt' i logaritmi due caratteri a destra, perocchè, essendo stato ciascun logaritmo accresciuto di sette zeri, egli è come se avessimo ridotto tutt' i logaritmi in frazioni, il cui denominator fosse 10000000; ed è per conseguenza evidente, ch' essendo i due ultimi caratteri a destra d'un logaritmo estremamente piccioli rispetto a questo denominatore, possono essere trascurati.

E però, avendo trovato che la differenza de' logaritmi de' numeri 9477000 e 9477856 è 392, giugno 392 al logaritmo di 9477000; e la somma 6.9767101 è 'l logaritmo del numero proposto 9477856.

350. *Trovare il logaritmo della frazione* $\frac{2}{3}$.

La frazione $\frac{2}{3}$ altro non è che 'l numero 2 diviso per 3; quindi io piglio i logaritmi 0.3010300 del numero 2, e 0.4771212 del numero 3, e levando l' ultimo dal primo, il residuo — 0. 1760912 è 'l logaritmo della frazione $\frac{2}{3}$ (*N.* 346.) : ora, questo logaritmo è negativo; perocchè, se da una grandezza togliesene una maggiore, il residuo è negativo. Tali sottrazioni si fan sottraendo la grandezza minor dalla maggiore, e scrivendo 'l residuo col segno —.

351. PROBLEMA. *Trovare 'l logaritmo del numero* $7\frac{1}{2}$.

Riduco 'l numero $7\frac{1}{2}$ in frazione, ed ho $\frac{15}{2}$: ora, questa frazione è uguale al numero 15 diviso per 2; e però io piglio i logaritmi 1.1760913 del numero 15, e 0.3010300 del numero 2.

e sot-

e ſottraendo l'ultimo dal primo , il reſiduo 0.8750613 è'l logaritmo della frazione $\frac{15}{2}$ (*N.* 346.).

Se dopo ridotti l'intero e la frazione in frazione ſi trovaſſe , che 'l numerator foſſe maggiore di 10000, cercherebbeſi 'l logaritmo di queſto numeratore, ſiccome inſegnammo ſopra (*N.* 349.) , e ſottraendo da eſſo il logaritmo del numeratore, il reſiduo ſarebbe 'l logaritmo del numero propoſto.

352. PROBLEMA. *Dato un logaritmo trovare a qual numero eſſo appartiene?*

Cerco queſto logaritmo nelle tavole, e s'io lo trovo , il numero ſcrittogli accanto ſarà quello, a cui eſſo appartiene.

Ma ſe non lo trovo, ſuppoſto che ſia 'l logaritmo 3.0441367 , cerco nelle dette tavole fra quai logaritmi ritrovaſi queſto numero, e lo trovo fra i logaritmi 3.0437551 , e 3.0441476, il cui primo appartiene al numero 1106 , e 'l ſecondo al 1107, il quale non differiſce che dell' unità ; ed in conſeguenza il logaritmo propoſto dee appartenere ad un numero maggior di 1106, e minore di 1107, il che non può eſſere, quando queſto numero non ſia compoſto d'intero, e di frazione. Piglio le differenze 3925 dei logaritmi de' due numeri e 3816 del minore di queſti logaritmi al logaritmo propoſto 3.0441367 , e facendo, a fine di rendere più giuſta l'operazione che ſon per fare, la differenza 1 de' due numeri 1106 e 1107 uguale a $\frac{100}{100}$, dico: ſe la differenza 3925 de' logaritmi 3.0437551 , e 3.0441476 dà $\frac{100}{100}$ per la differenza de' numeri, a' quali eſſi appartengono, coſa darà la differenza 3916 de' logaritmi 3.0441367 , e 3.0437451 per la differenza dei loro? e per la regola del Tre io trovo 3925. $\frac{100}{100}$: : 3916. $\frac{97}{100}$; ed in conſeguenza la frazione $\frac{97}{100}$ è viciniſſima alla differenza , che paſſa fra 'l numero 1107, e quello, ch' appartiene al logaritmo propoſto. Onde, giugnendo $\frac{97}{100}$ a 1106 , la ſomma 1106$\frac{97}{100}$ è 'l numero, a cui appartiene il logaritmo 3.0441367.

Se 'l logaritmo propoſto è 4.2507125 , il quale ſupera 'l maſſimo dei logaritmi delle Tavole, levo 'l minore, che ne poſſa eſſer tolto, per fare in maniera che 'l reſiduo troviſi verſo 'l fine delle Tavole ; così ne tolgo il logaritmo 0.3010300, ch' appartiene al numero 2 ; e 'l reſiduo è 3.9496827 : cerco queſto logaritmo nelle Tavole , e trovando , ch' ei appartiene al numero 8906 , moltiplico queſto numero per 2 ; e 'l prodotto 17812 è 'l numero, ch' appartiene al logaritmo propoſto 4.2507127 (*N.* 346.) ; imperoc-

rocchè, per avere questo logaritmo, si dee al logaritmo 3.9496827 aggiugnere quello di 2, ch' abbiam sottratto dal logaritmo proposto.

Sia finalmente il logaritmo proposto 4.1712876; levo dal numero 2 il logaritmo 0.3010300, e 'l residuo è 3.8702576: ora, questo logaritmo non trovasi nelle Tavole; e veggo, ch' egli è fra i logaritmi 3.8702283, e 3.8702868, il cui primo appartiene al numero 7417, e 'l secondo al numero 7418, la cui differenza è 1, ch' io faccio uguale a $\frac{100}{100}$. La differenza de' logaritmi di questi due numeri è 585, e quella del minore di essi al logaritmo 3.8702576 è 293. Onde dico: se la differenza 585 de' logaritmi 3.8702283, e 3.8702868 dà $\frac{100}{100}$ per la differenza de' numeri, a' quali essi appartengono, cosa darà la differenza 293 de' logaritmi 38702283 e 38702576 per la differenza dei loro? e per la regola del tre trovo 585. $\frac{100}{100}$: : 293. $\frac{50}{100}$; così $\frac{50}{100}$, od una metà è la differenza del numero 7417 al numero, ch'appartiene al logaritmo 3.8702576; e però questo numero è $7417\frac{1}{2}$: ma per avere il logaritmo proposto 41712876, conviene aggiugnere al logaritmo 3.8702576 il logaritmo di 2, ch' abbiam sottratto dal proposto; onde si dee moltiplicare il numero $7417\frac{1}{2}$ per 2 (*N.* 346.); e'l prodotto 14835 sarà 'l numero, ch'appartiene al logaritmo 41712876.

353. Potrei proporre varie questioni, la cui risoluzione farebbe vedere l' utilità de' logaritmi; ma per non essere troppo prolisso, non proporrò che le due seguenti.

354. PROBLEMA. *Dati il primo e 'l secondo termine d' una progression geometrica, col numero de' termini, trovar l' ultimo.*

1 e 2 sieno i due primi termini, e 14 il numero de' termini: dunque l' esponente della progressione sarà 2, e 'l numero de' termini meno 1 è 13: ora, l'ultimo termine è uguale al primo moltiplicato per l' esponente innalzato ad un grado uguale al numero de' termini meno uno (*N.* 309.); onde l' ultimo termine è uguale ad 1 moltiplicato per la tredicesima potenza di 2: ma perchè lungo sarebbe a cercar la tredicesima potenza di 2, pigliasi 'l logaritmo 0.3010300 di 2, e moltiplicandolo per 13, il prodotto 3.9133900 è 'l logaritmo della tredicesima potenza di 2: ora, questo logaritmo non è nelle Tavole; ma ne trovo uno, ch' è 3.9133899, il quale non differisce che d' un'unità, ed è in conseguenza il medesimo; così 'l numero 8192, a cui questo loga-

garitmo appartiene, è la tredicesima potenza di 2, e questa potenza moltiplicata per lo primo termine 1 dà l'ultimo termine ricercato 8192.

355. PROBLEMA. *Dati il primo, il secondo, e l'ultimo termine d' una progression geometrica trovare il numero de' termini.*

In ogni progression geometrica, il primo e'l terzo termine sono fra loro, come i quadrati de' due primi; il primo e'l quarto, come i cubi de' due primi; il primo e'l quinto, come le quarte potenze de' due primi, ec. (*N.* 327.); dal che ne segue, che'l primo termine è all'ultimo, come 'l primo innalzato ad una potenza, il cui esponente è uguale al numero de' termini meno uno, è al secondo innalzato alla stessa potenza. Ora ciò posto.

1 e 2 sieno i due primi termini, ed 8192 sia l'ultimo: chiamo a il primo, b il secondo, c l'ultimo, ed x il numero de' termini meno uno; però $a^x . b^x : : a . c$.

Chiamo la il logaritmo di a, lb quel di b, ed lc quello di c; dunque 'l logaritmo di a^x, cioè 'l logaritmo di a innalzato alla potenza x, è xla; perocchè, quando s' innalza una grandezza ad una potenza, si moltiplica 'l suo logaritmo per l'esponente di detta potenza (*N.* 346.): per la stessa ragione, il logaritmo di b^x è xlb; onde i logaritmi della proporzion geometrica $a^x . b^x : : a . c$ sono $xla . xlb . la . lc$, i quali sono in proporzione aritmetica, perocchè le grandezze, di cui essi sono i logaritmi, sono in proporzion geometrica. E però, facendo la somma degli estremi, e quella de' medj, ho $xla + lc = xlb + la$; e facendo passare xla dal primo nel secondo membro, ed la dal secondo nel primo, ho $lc - la = xlb - xla$; e dividendo tutto per $lb - la$, trovo $x = \frac{lc - la}{lb - la}$: il che mi mostra, che 'l numero de' termini meno uno è uguale alla differenza del logaritmo dell' ultimo a quello del primo divisa per la differenza del logaritmo del secondo termine a quello del primo.

Piglio adunque il logaritmo dell' ultimo termine 8192, ch' è 3.9133899, ovvero 3.9133900, (il che punto non 'l altera, come s' ha veduto nel precedente problema) e sottraendo 'l logaritmo del primo termine, il quale non è composto che di zeri, il residuo è ancora 3.9133900. Piglio parimente il logaritmo 0.3010300 del secondo termine 2, da cui togliendo 'l logaritmo del primo, il residuo è ancora 0.3010300; divido 3.9133900

per

per o. 3010300; e 'l quoziente 13 mi moſtra, che 'l numero de' termini meno uno è 13.: ed in conſeguenza la progreſſione è compoſta di 14 termini.

356. Qui ſi dovrebbe parlare delle frazioni decimali; ma perchè nulla abbiam detto delle pertiche quadrate e cube, a cui queſto calcolo talvolta ſi applica, così non tratteremo queſta materia che nel ſeguente libro.

IL FINE DEL PRIMO LIBRO.

ELE.

ELEMENTI DELLE PRINCIPALI PARTI DELLE MATEMATICHE.

LIBRO SECONDO,

Che contiene gli Elementi della Geometria Teorica e Pratica delle Linee, delle Superficie e de' solidi, della Trigonometria, delle Sezioni Coniche, della Misura delle Muraglie e de' Legni, e del Calcolo delle Frazioni Decimali.

CAPITOLO PRIMO.

Diffinizioni, e Principj.

1. IL *corpo*, o la *materia* è ciò, che ha parti congiunte insieme: quanto vedesi per mezzo de' sensi è di tal natura.

2. Il *punto* è una porzione di materia sì picciola, che puossi concepire come *indivisibile*, o senza parti.

3. La *linea*, o *lunghezza* è la traccia, che lascierebbe un punto A (*Fig.* 1.), il quale partendo da un luogo A andasse ad un'altro B; ovvero la *linea* è una serie di punti

punti ordinati sopra detta traccia. I luoghi, o le posizioni A, B chiamans' i *termini*, o l'*estremità della linea*.

4. Essendo la linea composta di parti, può essere divisa traversalmente in quante si voglia parti AC, CD, BD (*Fig.* 1.): ma poichè i punti, che la compongono, si considerano indivisibili, deesi perciò supporre, che la linea non possa esser divisa, o segata dall' estremità A all'estremità B, come dall'una all'altra estremità si sega un bastone; e per conseguenza qualsivoglia linea AB può dirsi lunga solo dall'una all'altra estremità, non già da dritta a sinistra.

5. La *linea retta* è'l tratto più corto, che possa prendere un punto A (*Fig.* 1.), andando da un luogo A ad un'altro B; e la *curva* è qualunque altro tratto fra i suoi termini A, B (*Fig.* 2.) fuorchè il più corto.

6. Per *più corto tratto* intendesi la strada, che prenderebbe un'uomo, il quale essendo in A (*Fig.* 1.), e fissando sempre lo sguardo in B, andasse in detto B senza mai divertersi a destra, o a sinistra.

7. Ora, da questa idea del *tratto più corto*, chiaramente ne segue, che fra i due termini A, B non si possono dare due tratti più corti. Imperocchè un'uomo che va da A in B, in esso fissando sempre lo sguardo senza mai divertersi a destra, o a sinistra, quando anche cento volte incominciasse'l suo viaggio, non potrebbe prendere due tratti, o strade totalmente differenti.

8. *Prolungare* una linea retta egli è continuarla in modo, che'l suo prolungamento congiunto alla linea retta faccia una sola retta linea.

9. La *distanza* d' una grandezza materiale ad un' altra è'l più corto tratto, che trovisi fra esse due grandezze. Così la distanza fra i punti A, B (*Fig.* 1.) è la retta AB tirata fra essi due punti, ec.

10. La *superficie* è la traccia d' una linea AB (*Fig.* 3.), che da una posizione AB va ad un'altra CD; o sia la linea AB durante'l suo moto sempre della stessa grandezza (*Fig.* 3.), o vada ella diminuendo (*Fig.* 4.), o vada ella crescendo (*Fig.* 5.), od ora crescendo ed ora diminuendo (*Fig.* 6.). Si può dire, che la superficie è una serie di linee poste sopra la traccia della linea AB, che va dalla posizione BA alla posizione CD.

11. La superficie ha due lunghezze, l'una secondo la linea AB, e l'altra secondo la distanza della linea AB alla linea DC: ma poichè si suppone, che le linee, le quali compongono la superficie, non possano esser divise, o segate dall' una all' altra estremità

(*N.* 4.); così pure si dee supporre, ch' una superficie ABDC non possa esser divisa, o segata dall' estremità AB all' estremità CD, come dall' una all' altra estremità si sega una tavola ABDC, la quale abbia qualche grossezza: in questo senso non può dunque dirsi, che la superficie sia lunga, cioè grossa, come dicesi ordinariamente parlando d' una tavola.

12. L' una delle due lunghezze della superficie dicesi *lunghezza*, e l' altra s' appella *larghezza*. Supposto dunque, che le due linee AB, AC (*Fig.* 3.) sieno le due lunghezze della *Superficie* ABDC, e che la linea AB s' appelli lunghezza, la linea AC dirassi larghezza; che se poi *lunghezza* s' appella la linea AC, ciò ch' è per se indifferente, la linea AB dirassi *larghezza*. Talvolta la lunghezza si chiama *base*, e la larghezza dicesi *altezza*.

13. La superficie *piana* è quella, le cui parti non sono l' une più, o meno sollevate dell' altre; come sarebbe, per esempio, la superficie d' uno specchio ordinario, d' una tavola bene appianata, ec. e la *curva* è quella, le cui parti non sono disposte nel modo, ch' abbiam detto; come p. e. la superficie d' una colonna, d' un pane di zucchero, ec.

14. Il *corpo*, o 'l solido è la traccia d' una superficie ABCD (*Fig.* 7.), che da una posizione ABCD va ad un' altra posizione EFGH; o sia la superficie ABCD durante 'l suo moto sempre della stessa grandezza (*Fig.* 7.), o vada ella diminuendo (*Fig.* 8.), o vada ella crescendo (*Fig.* 9.), od ora diminuendo ed ora crescendo (*Fig.* 10.). Puossi dire, che 'l corpo è una serie di superficie poste le une sopra l' altre, quasi come i fogli d' un Libro, sopra la traccia della superficie ABCD, che va dalla posizione ABCD alla posizione EFGH.

15. Dunque 'l corpo ha tre lunghezze, cioè le due lunghezze della superficie ABCD, e quella della distanza di ABCD alla posizione EFGH.

16. L' una delle tre lunghezze del corpo ritiene il nome di *lunghezza*, l' altra dicesi *larghezza*, e la terza *profondità*. Puossi ad arbitrio per la lunghezza, per la larghezza, o profondità pigliar qual d' esse più ci piace; talvolta quella superficie, che ha due di queste lunghezze, dicesi *base*, ed allora la terza lunghezza s' appella *altezza*. Per esempio, se la superficie ABCD si dice *base* del solido, la linea, che segnerà la distanza di detta base ABCD all' altra posizione EFGH, dirassi l' *altezza*. Insegneremo in seguito, come debbasi ritrovare la retta, che segna la di-

stanza fra due linee, fra due superficie, o due corpi, ec.

17. La lunghezza, la larghezza e la profondità diconsi le *tre dimensioni* de' *corpi*, o de' solidi.

18. Quantunque le tre dimensioni del corpo sieno realmente inseparabili, sicchè non vi sia linea senza larghezza, e profondità, si può nondimeno considerar l'una di queste senza riflettere all'altre. Posso p. e. considerare la lunghezaa d' una strada, dividerla in più parti, far prendere ad essa diversi giri, ec. senz'attender punto alla sua larghezza; e tuttavolta sarà verissimo, che questa lunghezza è'l doppio della sua metà, il triplo del suo terzo, ec. che di dritta, ch'era, è divenuta curva, ec. Posso parimente considerare la superficie d'uno spazio, dividerla in più parti, fare ad essa cangiar figura, ec. senz'attender punto alla sua profondità; e tuttavolta verissima sarà la conclusione, che questa superficie, di quadrata ch'era, è divenuta lunga, ec. perciò s' ingannerebbe, chi non ammettesse queste supposizioni, o piuttosto quest' astrazioni, da cui si deducono delle conseguenze, che sono verità incontrastabili, e d'incredibil vantaggio.

19. La *Geometria* è quella scienza, ch' insegna a conoscere le proprietà de' corpi secondo le loro tre dimensioni, lunghezza, larghezza, e profondità. Ella dividesi in *Geometria semplice*, *e composta*.

20. Non può darsi una linea retta più corta d' un' altra retta linea, poichè l' una e l' altra prendono 'l tratto più corto fra le loro estremità; si possono bensì trovare infinite linee curve di differente spezie secondo le strade più lunghe, o più brevi, che prenderanno fra i loro termini, e secondo le differenti maniere, in cui le parti saranno fra loro disposte. Ora, fra tante spezie di linee curve la Geometria semplice considera solo la circolare, e per conseguenza si restrigne alla considerazione delle superficie terminate da linee rette e circolari, ed a quelle de' corpi, o solidi, le cui superficie sono composte di superficie piane, o di superficie, le quali sono una serie di circolari. All' incontro la Geometria composta s' estende a qualunque spezie di curve, alle superficie terminate da tali linee, ed a' solidi, le cui superficie per una delle loro dimensioni hanno alcuna di dette linee. Vi vorrebbono infiniti Volumi per trattare *funditus* la Geometria composta, infinito essendo 'l numero delle curve, ch' immaginar si possono dagli uomini; e perciò, dopo veduti gli Elementi della Geometria semplice, parleremo delle sole tre curve delle sezioni coniche, il cui uso ora è'l più frequente, e necessario.

21. Il

21. Il *circolo* è uno spazio piano ABCD (*Fig.* 11.) terminato da una linea curva ABCD, ciascun punto della quale è ugualmente lontano da un punto O preso in detto spazio. Il punto O chiamasi *centro del circolo*, la linea curva ABCD chiamasi *circonferenza*, e tutte le rette AO, BO, ec. tirate dal centro ai punti della circonferenza diconsi *raggi*: così tutti li raggi d' un circolo sono uguali; imperocchè, essendo essi linee rette, misurano le distanze dai punti della circonferenza al centro, e queste distanze per la diffinizione del circolo sono fra loro uguali.

22. Qualunque retta linea, che passi pel centro O d' un circolo, e che d'amendue le parti opposte termini alla circonferenza, dicesi *diametro*; ed egli è sempre doppio del raggio, poich' è composto di due raggi AO, OC.

23. Qualunque diametro AC (*Fig.* 12.) divide 'l circolo, e la circonferenza in due parti uguali: si concepisca, 1°. che 'l piano del circolo ABCD sia segato lungo la retta AC; 2°. che in A vi sia una commessura, ed in C un'altra, e che intorno queste commessure si faccia girar la parte ABC del piano del circolo, finchè venga a cadere sopra l'altra parte ADC dello stesso piano; stando immobili i punti A, C della linea AC, saranno altresì immobili tutti gli altri punti della stessa retta AC; altrimenti, la linea AC più retta non sarebbe fra le sue estremità: così 'l centro O non cangierà di sito. Ora, se cadendo'l piano ABC sul piano ADC non li fosse perfettamente uguale, nè meno la parte di circonferenza ABC caderebbe sopra l'altra parte di circonferenza ADC; e perciò o ella interamente caderebbe infra 'l diametro AC e la parte di circonferenza ADC, o interamente fuori di ADC, ovvero parte dentro, e parte fuori. S'ella cadesse fra'l diametro, come in ARC, il raggio OD tirato dal centro O a un punto D della parte di circonferenza ADC prima segherebbe la parte di circonferenza ARC in un punto R, e per conseguente il raggio OR sarebbe minore del raggio OD, cioè si potrebbono nell'istesso circolo tirare due raggi disuguali; il ch' è contrario alla natura del circolo. Così pure, se ABC cadesse fuori del diametro, come in ASC, il raggio OS tirato alla parte di circonferenza ASC prima fegherebbe ADC in un punto D, e nell'istesso circolo s'avrebbero pure due raggi disuguali OS, OD; in fine se cadendo ABC sopra ADC avesse una parte AMD infra ADC (*Fig.* 13.), e una parte DSC di fuori, il raggio OM tirato sopra la parte interiore AMD non potrebbe segare la parte di circonferenza ADC, quando non si prolun-

lungasse in R; ed in conseguenza OM sarebbe più corto di OR, e'l raggio OS tirato sopra la parte esteriore DSC segherebbe prima ADC in N, ed OS sarebbe maggiore di ON: così s'avrebbero ancora in un medesimo circolo due raggi disuguali OM, OR, OS; il ch'è impossibile. Dee dunque assolutamente la parte ABC di circonferenza cadere sopra l'altra parte ADC, ed esserle uguale; e in conseguenza tanto 'l circolo quanto la circonferenza debbono esser segati ciascuno in due ugualmente, o sia per mezzo.

24. Se una retta AO (*Fig.* 11.), la qual'è dentro un piano, gira sopra detto piano intorno la sua estremità O, che sta immobile, l'altra sua estremità A descriverà una circonferenza di circolo ABCD, di cui 'l punto O sarà centro; così pure, le col compasso pigliasi la grandezza AO della linea AO, e che fissata l'una delle sue punte in O, si faccia girare l'altra A intorno detto punto, tenendo sempre il compasso a piombo sul piano, la punta A descriverà la medesima circonferenza ABCD. Qualunque parte AB, o AD, ec. d'una circonferenza dicesi *Arco*.

25. *Se supponesi, ch'un raggio di circolo* DO (*Fig.* 11.) *giri 'ntorno 'l suo centro* O *con moto sempre uguale, gli archi* DA, AB, ec. *del circolo, che saranno descritti della sua estremità* D *in tempi uguali, saranno uguali*.

Supponiamo, che 'l Raggio DO sia in un minuto passato da DO ad AO, e che in un'altro minuto passi da AO a BO; egli è evidente, ch'in questo secondo minuto ei scorre lo stesso tratto, ch' avrebbe scorso, se in fine del primo minuto fosse stato riposto nel primiero suo sito DO, e avesse continuato a muoversi durante 'l secondo minuto: ora in tal caso, la sua estremità D avrebbe nel secondo minuto descritto lo stesso arco DA, ch'essa avrebbe descritto nel primo, mercè il suo moto uguale. Dunque l'arco AB, ch' egli ha descritto da AO col medesimo moto passando nel secondo minuto a BO, dee parimente essere uguale all'arco DO.

26. I Geometri dividono la circonferenza del circolo in 360 parti, o archetti fra loro uguali, che chiamansi *gradi*, qualsivoglia di questi gradi in 60 particelle uguali, che si chiamano *minuti*, o *minuti primi*; qualsivoglia minuto in 60 particelle fra loro uguali, che diconsi *secondi*, o *minuti secondi*; qualsivoglia secondo in 60 particelle fra loro uguali, che diconsi *terzi*; e così successivamente.

27. *Se una linea* AO (*Fig.* 14.) *gira intorno la sua estremità* O, *come intorno un centro, tutte le circonferenze descritte da' suoi punti.*

punti A, B, C, ec. *saranno descritte in un medesimo tempo; lo stesso dicasi delle loro metà, de' loro terzi, de' loro quarti, ec.*

1°. Girando la linea AO intorno 'l punto O non può ritornare nel primiero suo sito AO, se nel tempo stesso ne'loro siti non ritornano tutt'i suoi punti A, B, C; ec. altrimenti, questa linea più retta non sarebbe: ora, ritornati che sieno questi punti nel primo lor sito, le loro circonferenze son già descritte; dunqu' esse sono descritte in un medesimo tempo. 2°. Supponiamo, che la linea AO sia da AO passata in EO, e che l'arco AE descritto dal punto A sia p. e. la quinta parte della sua circonferenza; onde 'l punto A in cinque tempi, uguali a quello ch' egli ha impiegato descrivendo l'arco AE, descriverà l' intera circonferenza: ora, il punto B avrà descritto l'arco BH nell'istesso tempo, che 'l punto A avrà descritto l'arco AE; così, se l'arco BH fosse minore della quinta parte della sua circonferenza, il punto B in cinque tempi, uguali a quello che egli ha impiegato scorrendo l'arco BH, descriverebbe cinque parti uguali della sua circonferenza, ognuna minore della quinta parte; egli adunque non descriverebbe i cinque quinti della sua circonferenza, cioè l'intera sua circonferenza; il ch'è impossibile, dovendo esso descrivere la sua circonferenza nel tempo stesso, ch'il punto A descrive la sua. Parimente, se l'arco BH fosse maggiore della quinta parte della sua circonferenza, il punto B in cinque tempi, uguali a quello ch'egli ha impiegato descrivendo quest'arco, descriverebbe cinque parti uguali della sua circonferenza, ognuna maggiore della quinta parte; ei descriverebbe adunque più di cinque quinti, cioè più della sua circonferenza; il che per la stessa ragione è ancora impossibile: dunque, ec.

Quindi apparisce, che gli archi CR, BH, ec. descritti da tutt' i punti della linea AO fra una delle sue posizioni AO ed un'altra EO, vagliono tutti un medesimo numero di gradi delle loro circonferenze; poichè, se l'arco AE vale p. e. la sesta parte della sua circonferenza, tutti gli altri archi CR, BH, ec. varranno altresì la sesta parte della loro: ora, ognuna di dette circonferenze è divisa in 360 gradi; tutti gli archi adunque valeranno la sesta parte di 360 gradi, e per conseguenza un'istesso numero di gradi delle loro circonferenze.

28. Gli assiomi, o principj, su cui la Geometria fonda tutte le sue dimostrazioni, sono i seguenti.

I. *Egli è impossibile, ch' una cosa nello stesso tempo sia, e non sia.*

II. *Le parti d' un tutto prese insieme sono uguali al tutto.*

III. *Se*

III. *Se due grandezze sono uguali ad una terza, esse sono uguali anche fra loro.*

IV. *Se a due grandezze uguali si aggiungono, o si levano grandezze uguali, le somme, od i residui saranno uguali; e se vi si aggiungono, o levano grandezze disuguali, le somme, od i residui saranno disuguali.*

V. *Se si moltiplicano, o si dividono grandezze uguali per grandezze uguali, i prodotti, o quozienti saranno uguali; e se si moltiplicano o si dividono per grandezze disuguali, i prodotti, o quozienti saranno disuguali.*

VI. *Se sovrapposte due grandezze si combaciano esattamente, in modo che le parti dell'una non eccedano quelle dell'altra, esse saranno perfettamente uguali.*

Non è maraviglia, ch'una scienza, la quale servesi di principj così chiari ed evidenti, come son questi, deduca conseguenze di perfetta certezza; è bensì maravigliosa cosa e stupenda, che colla sola semplicità loro ella possa innalzar lo spirito a sì belle, e profonde cognizioni.

29. Quando mostrasi l'uguaglianza di due grandezze sovrapponendole; ciò dicesi *dimostrare per la sovrapposizione*. Hanno preteso alcuni, che questo modo di dimostrare non sia interamente geometrico: ma noi siamo di diverso parere; perocchè, se la Geometria è quella scienza, che dimostra le verità colle strade più semplici e corte, a fine di far vedere che due grandezze sono uguali, non sapremmo ritrovare strada migliore di questa, cioè di far vedere, che sovrapposte si combaciano esattamente. Così quegli, che hanno avuto tale scrupolo, sono stati costretti di provare verità facilissime con lunghi, e nojosi rigiri.

30. Non mi sarà fatta riprensione veruna, se adopro sovente il circolo dove tratto di linee rette, e se facendo così non osservo l'ordine naturale delle materie. Parlando di linee rette mi servo del circolo come d'un'istrumento necessario nella più parte de' Problemi, che concernono le rette linee, e di cui fa di mestiere conoscere almeno la formazione a fine di servirsene con fondamento; ma questo stesso circolo considerato come figura geometrica, che rinchiude moltissime belle proprietà utili alla Geometria, è trattato in un Capitolo a parte secondo l'ordine delle materie.

31. AVVERTIMENTO. Per brevità, ne' Capitoli seguenti supporrò sempre, che le differenti linee, le quali io paragonerò fra loro, o ch'io tirerò nelle figure, sieno nello stesso Piano, cioè nella

stessa

ſteſſa ſuperficie piana, quando non dica eſpreſſamente 'l contrario; e ſarà bene porvi attenzione, perocchè altrimenti la maggior parte delle propoſizioni e dimoſtrazioni ſarebbero aſſolutamente falſe.

CAPITOLO SECONDO.

Delle linee rette, degli angoli da eſſe formati, delle linee perpendicolari, e delle parallele.

32. PROPOSIZIONE. I^a. *Fra due punti* A, B (Fig. 1.) *non può tirarſi che una ſola retta linea.*

La linea AB è 'l tratto più corto fra i ſuoi termini A, B; ora, non ſi poſſono dare due tratti più corti fra due punti (*N.*7.). Da A a B non può dunque tirarſi che una ſola retta; cioè, ſe dopo tirata la retta AB ſe ne tira un'altra, la ſeconda caderà ſopra la prima, ed a quella ſarà interamente ſimile.

33. COROLLARIO I°. *Tutte le parti* AC, CD, ec. *d' una retta* AB (Fig. 1.) *ſon parimente linee rette, e ſono fra loro in retta linea.*

La linea AB è retta per ipoteſi; il punto A ha dunque deſcritto queſta linea andando da A in B ſenza mai diverterſi a deſtra, o a ſiniſtra (*N.* 6.); onde nè meno andando da A in C egli s'è mai divertito a deſtra, o a ſiniſtra, e la ſtrada AC, da lui tenuta è una linea retta: lo ſteſſo ſi proverà dell' altre parti CD, ec. della linea AB. Per la medeſima ragione, la ſtrada, ch' il punto A ha tenuto da A in D, è una retta linea: ma AD è compoſta di due parti AC, CD; queſte due parti AC, CD ſono dunque in retta linea; e così dicaſi dell'altre.

34. COROLLARIO II. *Se due rette* AB, DE (Fig. 1.) *hanno due punti comuni* D, B; *cioè, ſe queſti due punti appartengono ugualmente a due linee, dette due linee* AB, DE *formano una ſola retta* AE.

Si concepiſca, che 'l punto A poſto in A abbia deſcritto la retta AB, e ch' il medeſimo punto poſto in D abbia deſcritto la retta DE; egli avrà deſcritto le parti AD, BD della retta AB ſenza mai diverterſi a deſtra, o a ſiniſtra; poichè dette due parti ſono in retta linea (*N.* 33.). Per la ſteſſa ragione, anche 'l punto A avrà deſcritto le parti BD, BE della retta DE ſenza mai diver-

 terſi

terfi a deftra, o a finiftra: il punto A avrà dunque defcritto le tre linee AD, BD, BE fenza mai diverterfi a deftra, o a finiftra, e però la linea AE compofta di quefte tre linee farà retta: ora, la linea AE è la fteffa che le due rette AB, DE, le quali hanno la parte comune DB; ond'effe fono in retta linea.

35. COROLLARIO III. *Se dunque due linee fi fegano, non fi fegano ch'in un fol punto.*

Imperocchè, fe fi fegaffero in due punti, elle avrebbon due punti comuni, e formerebbero una fola retta; e per confeguenza non fi fegherebbono.

36. PROBLEMA. *Fra due dati punti* A, B (Fig. 1.) *tirare una retta, e prolungarla ad arbitrio.*

Prendo un filo fottile, ch'io tingo di nero con del carbone; lo ftendo colle mani, il più che fia poffibile, fenza romperlo, e pofcia lo pofo ful Piano, in cui fono i dati punti A, B, in modo che quefto filo paffi per detti due punti; la traccia nera, ch'e' lafcia ful Piano fra A e B, farà la retta cercata; poichè effendo egli ftefo il più che fia poffibile, prende'l più corto tratto fra A, e B. Sopra la traccia AB fra A e B prendo un punto D, e tenendo'l filo ftefo come prima, lo faccio paffare per i punti D, B, talmente che la traccia, ch'ei lafcierà, s'eftenda di là da B, come da B in E, e la parte BE di detta traccia farà'l prolungamento della linea AB dalla parte di B; perocchè la traccia DE e la traccia AB fon due rette linee, che hanno due punti comuni D, B, e per confeguenza formano una fola retta (*N.* 34.); e nello fteffo modo d'amendue le parti fi prolungherà la linea AB ad arbitrio.

Ciò fuppone, ch'il Piano, fu cui ftanno i due punti A, B, foftenga'l filo in ognuna delle fue parti, come farebbe un Piano, il qual foffe orizzontale: ma s'egli foffe alzato di fopra dell'orizzonte come un muro, allora, non effendo'l filo foftenuto in ognuna delle fue parti, il pefo di effe li farebbe defcrivere una curva; e in tal cafo converrebbe fervirfi d'un'iftrumento, che *Regola* comunemente s'appella.

Per coftruire queft'iftrumento prendefi una tavola ben'appianata, e non molto groffa, od una piaftra di rame, d'argento, ec. fopra quefta tavola, o piaftra fi fegna una linea retta, lungo la quale fegafi di poi detta tavola, e l'iftrumento è coftruito.

Dunque, affine di tirare una retta fra due punti A, B (Fig. 15.), ponefi la Regola RS ful Piano, in cui fono i dati punti A, B, in

modo

modo che tocchino il lato RS fatto in linea retta; ponendo poscia 'l lapis, o la penna sull'uno de' punti A, tirasi 'l lapis, o la penna da A verso B, seguendo sempre la retta RS; e così la linea AB, che si segna sopra 'l Piano, è retta, poichè segue la retta RS senza divertersi a destra o a sinistra.

Per conoscere se una regola è ben costruita, sopra un Piano con un filo segnasi una retta AB, poi sul Piano ponesi la Regola RS, e s'esamina, se 'l suo lato RS s'adatti alla retta AB senza divertersi a destra, o a sinistra; se non manca alcuna di queste condizioni, la regola è esatta.

37. COROLLARIO. *Dati due punti* A, B (Fig. 1.) *d' una retta linea, è facile conoscere la posizione, o direzion di detta linea.*

Fra i due punti A, B tirisi una retta linea; essa sarà certamente la retta, a cui appartengono questi due punti, non potendosi fra i detti due punti tirare ch' una sola retta (*N.* 32.).

38. PROPOSIZIONE II. *Se dai termini* A, B *d' una retta* AB (Fig. 16.) *tiransi due rette* AC, BC, *le quali si seghino in* C, *e altre due rette* AE, BE, *le quali si seghino in* E, *infra l' altre due, le due prime* AC, BC *prese insieme sono maggiori dell' altre due* AE, BE *prese altresì insieme.*

Sembra naturale il dire, che le due AC, BC prendendo un giro maggiore delle due AE, BE abbiano anche ad esser maggiori; ma siccome ciò da molti non s' ammetterebbe per dimostrazione geometrica, ecco come noi lo proviamo.

Prolungo l' una dell' interne BE, finchè seghi l' esterna opposta AC in H; retta essendo la linea AE fra i suoi termini A, E, ella è più breve delle due AH, EH prese insieme, che partono dai medesimi termini A, E, e che prendon differente cammino; così io ho $AE < AH + EH$: parimente, retta essendo la linea BH, o $BE + EH$ fra le sue estremità B, H, ella è più breve delle due BC, CH prese insieme, e perciò $BE + EH < BC + CH$; sommando dunque la più breve AE colla più breve $BE + EH$, e la più lunga $AH + EH$ colla più lunga $BC + CH$, io avrò $AE + BE + EH < AH + EH + BC + CH$; e d' amendue le parti sottraendo la retta EH, avrò $AE + BE < AH + CH + BC$: ma $AH + HC = AC$; dunque $AE + BE < AC + BC$.

39. PROPOSIZIONE III. *Se una retta* AB (Fig. 17.) *ne sega un' altra* CD *in un punto* B, *essendo questa retta* AB *prolungata dal lato di* B *passerà dall' altro lato della retta* CD.

Dal punto B preso per centro descrivasi con un' apertura di compasso

paſſo ad arbitrio una circonferenza di circolo ADEC; dunque la retta CD, che paſſa per lo centro B, e che ſega la circonferenza ne' punti C, D, è un diametro; e ciaſcuno dei due archi CAD, CED vale la metà della circonferenza (*N.* 22. 23.): ſimilmente, eſſendo la linea AB raggio del circolo, ſe ſi prolunga, diverrà diametro, e ſegherà la circonferenza in due parti uguali. Ora, ciaſcuna delle parti CA, AD della ſemicirconferenza CAD è minore della ſemicirconferenza; dunque ciaſcuna delle ſemicirconferenze ACE, ADE, che verrà ſegata dalla linea AB prolungata, ſarà maggiore delle due parti AC, AD; e per conſeguenza il punto E, in cui ſi congiugneranno le due ſemicirconferenze, e per cui paſſar dee la linea AB, ſarà di là dalla linea CD per rapporto alla linea AB.

40. DIFFINIZIONE. Se due linee AB, CD (*Fig.* 18.), che non hanno la ſteſſa direzione, cioè che non ſono in linea retta, ſi ſegano in un punto B, lo ſpazio indefinito ABC compreſo fra queſte linee diceſi *Angolo*. Il punto B, in cui le linee ſi ſegano, diceſi *vertice*, *cima*, o *punta* dell' angolo; e le due linee AB, CB ſono i *lati*, o le *gambe* dell'angolo. Egli è evidente, ch' un'angolo ABD è maggiore, o minore, ſecondo ch'i lati AB, CB ſono più, o meno diſtanti l'uno dall'altro; ovvero, ſecondo che la linea AB è più, o meno inclinata ſopra la linea CB.

41. S'indica un' Angolo colle tre lettere A, B, C poſte all'eſtremità de' ſuoi lati, ed al vertice, avvertendo di ſcrivere la lettera A del vertice fra l' altre due; così, per denotare l' angolo formato dalle rette AB, CB, diceſi l'angolo ABC.

42. PROBLEMA. *Miſurare gli Angoli, cioè trovare il rapporto, ch' eſſi hanno fra loro.*

Sieno gli angoli BAC, DAB (*Fig.* 19.), i quali hanno i loro vertici nello ſteſſo punto A; dal punto A preſo per centro, deſcrivo con un' apertura di compaſſo ad arbitrio una circonferenza di circolo CBDC, ch' io divido ne' ſuoi 360 gradi, e ſe, per eſempio, l' arco CB compreſo fra i lati dell' angolo BAC vale 30 gradi, e che l' arco DB compreſo fra i lati dell' angolo DAB ne vaglia 60, io dico, che i due angoli BAC, DAB ſono fra loro, come 30 a 60, o come 1 a 2, e così degli altri; avvertendo, ch' il vertice dell' angolo ſia ſempre al centro del circolo.

Diceſi comunemente, che l' arco CB di 30 gradi è la miſura dell' Angolo CAB, e che l' arco BD di 60 è la miſura

dell'

dell' Angolo DAB; il che dee tuttavolta intendersi nel senso da me spiegato.

Per render ragione d'. una tal pratica si concepisca, ch'il lato CA prolungato indiffinitamente dalla parte di C gir' intorno la sua estremità A, e cada a mano a mano sopra i lati BA, DA; tutti li punti di CB descriveranno fra i lati CA, BA dell' angolo BAC degli archi NQ, MS, ec. infinitamente prossimi, e che copriranno del tutto lo spazio BAC, il quale sarà in conseguenza la stessa cosa che la somma degli archi sopraddetti: ora, siccome suppo nesi, che l'arco CB abbia'l valore di 30 gradi, o della duodecima parte della sua circonferenza, tutti gli altri NQ, MS, ec. varranno parimente 30 gradi, o la duodecima parte delle loro (*N.*27.); così la somma degli archi, o l' angolo BAC valerà la duodecima parte della somma delle loro circonferenze: del pari, siccome si suppone, che l'arco BD contenuto fra i lati BA, DC dell' angolo DAC vaglia *60* gradi, tutti gli archi descritti dai punti della linea CA fra i lati BA, DA ne varranno altresì *60*, cioè la sesta parte delle loro circonferenze; così l'angolo DAB uguale alla somma di tutti quest'archi varrà la sesta parte della somma delle circonferenze: ora si ha veduto, che l'angolo BAC vale la duodecima parte di detta somma delle circonferenze; dunque l'angolo BAC è all' angolo BAD, come $\frac{1}{12}$ è a $\frac{1}{6}$, o come $\frac{1}{12}$ è a $\frac{2}{12}$, cioè come 1 è a 2; e per conseguenza come l' arco CB di 30 gradi è all' arco DB di *60*.

43. AVVERTIMENTO. La misura di uno, o più angoli non è adunque, come taluno creder potrebbe, la misura della lor grandezza; ma ella si è la misura del rapporto della loro grandezza, o dell'inclinazione de'loro lati; essendo per se manifesto, che quanto sarà minore l'arco contenuto fra i lati d'un' angolo, tanto più prossimi saranno questi lati l'uno all'altro, e conseguentemente tanto più inclinati l'uno sopra l'altro; e per l'opposto, quanto maggiore sarà l'arco contenuto, tanto meno inclinati saranno i lati.

E convien' osservare, che la maggiore, o minor lunghezza de' lati degli angoli niente cangi del loro valore, siccome cangiar non ne dee la maggiore, o minor grandezza della circonferenza, i cui archi misurar debbono il rapporto di detti angoli; imperocchè, 1°. Essendo gli angoli spazj indefiniti dal lato opposto ai loro vertici, la maggiore, o minor lunghezza de'loro lati non l'inverte punto, e considerar debbonsi questi lati, come prolungati in infinito. 2°. Tutti gli archi, sì grandi, che piccioli, compresi fra i lati di un'angolo, va-

vagliono uno steſſo numero di gradi delle loro circonferenze ; così gli archi BC, MS, contenuti fra i lati dell'angolo BAC, vagliono ugualmente 30 gradi, e gli archi DB, VS, contenuti fra i lati dell'angolo DAB, ne vagliono ugualmente 60 ; dunque, o mi servi degli archi CB, BD della circonferenza CDBC, o degli archi MS, SV della circonferenza MSVM, ſempre troverò, ch'i due angoli BAC, DAB ſono fra loro, come 30 gradi a 60.

44. DIFFINIZIONE. Qualſivoglia angolo DAM (*Fig.* 20.), ch'abbraccia il quarto DM della circonferenza, dicesi *Angolo retto*; qualunque angolo BAC, ch'abbraccia un'arco BC minore del quarto della circonferenza, dicesi *Angolo acuto*, e qualſivoglia angolo MAB, ch'abbraccia un'arco MB maggiore del quarto della circonferenza, dicesi *Angolo ottuſo*.

45. Tutti gli angoli retti ſono uguali, poichè ciaſcun retto abbraccia'l quarto della circonferenza, o 90 gradi ; ma tutti gli acuti non meno che tutti gli ottuſi non ſono uguali, poichè vi ſono degli angoli acuti, ch'abbracciano più, o meno gradi fra i 90, e degli ottuſi, che ne abbracciano più, o meno oltre i 90.

46. PROBLEMA. *All'estremità* D *d'una data retta* DE (Fig. 21.) *costruire un'angolo eguale al dato* ABC.

Dal punto B preſo per centro deſcrivo con un'apertura di compaſſo ad arbitrio una circonferenza CAHC. Ritengo la steſſa apertura di compaſſo, e portando l'una delle punte in D, deſcrivo coll'altra una circonferenza di circolo EMNE ; col compaſſo prendo la grandezza CA dell'arco CA contenuto fra i lati dell' angolo ABC, e porto questa grandezza da E in M ſopra la circonferenza EMNE ; dal punto M tiro al punto D la retta MD, e l'angolo MDE è uguale al dato ABC.

Imperocchè per la costruzione, il raggio DE della circonferenza EMNE è uguale al raggio BC della circonferenza CAHC ; perciò, ponendo il raggio DE ſopra'l raggio BC, in modo che perfettamente vi s'adatti, la circonferenza EMNE s'adatterà perfettamente ſu la circonferenza CAHC, e l'arco EM ſopra'l ſuo uguale CA ; la retta MD caderà dunque ſulla retta AB, poichè i termini M, D della retta MD caderanno ſopra i termini A, B della retta AB ; e poichè fra due punti non può tirarſi che una ſola retta linea : così l' angolo MDE caderà ſopra l'angolo ABC, e li farà uguale.

47. PROPOSIZIONE IV. *Se due angoli* ABC, abc (Fig. 22.) *ſono uguali, e ch' i lati* AB, CB *dell' uno ſieno uguali a' lati* ab, cb *dell' altro, la retta* AC, *che congiunge i termini* A, C *de' lati*

lati del primo, sarà uguale alla retta ac, *che congiugne i termini* a, c *de' lati del secondo; e gli angoli, che saran formati dalla retta* AC *coi lati* AC, CB *del primo saranno uguali ciascheduno a ciascheduno agli angoli, che saranno formati dalla retta* ac *coi lati* ab, cb *del secondo*.

Sovrappongo il lato BC del primo al lato *bc* del secondo, a cui egli è uguale; il lato BA caderà pure sul lato *ba*, che gli è uguale: se cadesse infra l'angolo *abc*, l'angolo ABC sarebbe minore dell' angolo *abc*, e se cadesse di fuori, l'angolo ABC sarebbe maggiore dell' angolo *abc*, il ch' è contro l' ipotesi; i punti A, C caderanno adunque sopra i punti *a*, *c*, e la retta AC tirata fra i punti A, C caderà sopra la retta *ac* tirata fra i punti *a*, *c*, e le sarà uguale; quindi l'angolo BAC caderà sopra l'angolo *bac*, e l'angolo ACB sopra l'angolo *acb*.

48. DIFFINIZIONE. Se si prolunga l'uno de' lati CB (*Fig.* 23.) d' un' angolo CBA di là dal vertice B in E, l'angolo ABE fatto dal prolungamento BE coll' altro lato AB, e 'l angolo ABC diconsi *Angoli conseguenti, o posti accanto*; e se si prolungano li due CB, AB di là dal vertice, l'angolo HBE fatto dai due prolungamenti, e l'angolo ABC diconsi *Angoli opposti al vertice*.

49. PROPOSIZIONE V. *Gli angoli conseguenti vagliono insieme due retti, e gli angoli opposti al vertice sono uguali*.

Dal vertice B (*Fig.* 23.) preso per centro con un' apertura di compasso ad arbitrio descrivo una circonferenza di circolo, che sega i lati degli angoli ne' punti C, A, E: il lato CB e 'l suo prolungamento BE formano una retta, che passa pel centro B, e che per conseguenza è un diametro, il quale sega la circonferenza in due semicirconferenze CAE, CHE. Ora, l'arco AC contenuto fra suoi lati è la misura dell' angolo ABC (*N.* 42.), e l' arco AE è la misura dell' angolo ABE; e questi due archi AC, AE presi insieme sono uguali alla semicirconferenza CHE, o ai due quarti di circonferenza; dunque la misura totale degli angoli conseguenti CBA, ABE si è due quarti di circonferenza: ma due quarti di circonferenza sono la misura di due angoli retti; dunque gli angoli conseguenti CBA, ABE vagliono insieme due retti; il che doveasi in primo luogo dimostrare.

L'angolo ABE e 'l suo angolo conseguente EBH vagliono insieme due retti, come si è provato; lo stesso angolo ABE e 'l suo angolo conseguente ABC vagliono parimente due retti; dunque li due ABE, EBH presi insieme sono uguali alli due ABE, ABC

presi.

presi insieme: e però, d'ambe le parti levando l'angolo ABE, resterà l'angolo EBH uguale all'angolo ABC, che gli è opposto al vertice.

50. DIFFINIZIONE. Una retta AB (*Fig.* 24.) è detta *Perpendicolare* ad un'altra retta CD, quando non è inclinata sopra CD più dall'uno che dall'altro lato.

51. COROLLARJ. *Dunque*, 1°. *I due angoli* ABD, ABC *formati da una perpendicolare* AB *colla retta* CD *dal medesimo lato sono amendue retti.*

Questi due angoli sono conseguenti, e vagliono insieme due retti (*N.* 49.): ora, essi sono uguali, non essendo AB inclinata sopra CD più dall'uno che dall'altro lato; ond'essi sono amendue retti.

Dunque, 2°. *Qualsivoglia linea* AB, *che forma un' angolo retto* ABD *con un'altra retta* BD, *è perpendicolare alla medesima linea* BD.

Imperocchè, se si prolunga DB in C, gli angoli conseguenti ABD, ABC varranno insieme due retti (*N.* 49.); e siccome ABD vale un retto, così un retto valerà anche ABC, e sarà uguale ad ABD (*N.* 45.): così AB non inclinerà sopra CD più dall'uno che dall'altro lato.

Dunque, 3°. *Se si prolunga la perpendicolare* AB *di là di* CB *in* E, *il suo prolungamento* BE *sarà altresì perpendicolare a* CD.

Gli angoli conseguenti ABD, DBE vagliono insieme due retti: ora, ABD è retto; dunque è retto ancora DBE, e però BE è perpendicolare a CD.

Dunque, 4°. *Se una linea* AE *è perpendicolare ad un'altra* CD, *questa lo sarà reciprocamente ad* AE.

Gli angoli ABD, BDE sono retti, come si è provato, e in conseguenza uguali (*N.* 45.); non è dunque CD inclinato sopra AE più dall'uno che dall'altro lato.

Dunque, 5°. *Da un' istesso punto* B *preso sopra una retta* CD *non può a detta linea tirarsi che una sola perpendicolare* BA.

Se si potesse tirarne un'altra, come BH, o dovrebbe ella passare a destra, o a sinistra della perpendicolare BA, e nondimeno gli angoli HBD, HBC, che da essa sarebbero formati con CD, dovrebbono essere uguali; il ch'è impossibile, essendo l'angolo HBD minore dell'angolo ABD che lo rinchiude, il qual'è retto, per essere AB perpendicolare a CD.

Dunque, 6°. *Se da un' istesso punto* B *preso sopra una retta* CD *si tirano da ambe le parti due rette* BA, BE *perpendicolari a* CD,

a CD ; *le medesime due rette saranno insieme una sola retta linea.*

Essendo AB perpendicolare a CD, il suo prolungamento BE dall'altro lato di CD è altresì perpendicolare a CD, come si ha dimostrato. Ora, dall'istesso punto B non si possono dal medesimo lato tirar due perpendicolari; la perpendicolare BE è adunque il prolungamento della perpendicolare AB, e queste due linee fanno insieme una sola retta.

52. PROPOSIZIONE VI. *Da un punto* A (Fig. 25.) *preso fuori d' una linea retta* CD, *e che non trovasi nel prolungamento della stessa retta, non può tirarsi che una sola retta* AB, *la quale sia perpendicolare sopra la medesima retta* CD.

Se si vuole, che dal punto A si possa sopra CD tirare un' altra retta AH, che le sia pure perpendicolare; io prolungo la perpendicolare AB in E dall'altro lato di CD, faccio BE = AB, e tiro la retta EH; la retta AB e 'l suo prolungamento BE sono perpendicolari sopra CD; gli angoli ABH, EBH son dunque retti (*N.*51), e in conseguenza uguali (*N.*45.) : Ora, i lati AB, BH del primo di questi angoli ABH, sono uguali ciascheduno a ciascheduno a'lati BE, BH del secondo EBH, e le linee AH, EH, congiugnendo i termini di questi lati uguali, saranno eguali; dunque l'angolo AHB, formato dalla linea AH col lato BH del primo angolo ABH, è uguale all'angolo EHB, formato dalla linea EH col lato BH del secondo angolo EBH (*N.* 47.) : ma AHB dee esser retto, poichè si suppone AH perpendicolare a CD; onde retto sarà ancora EHB, e la retta EH sarà parimente perpendicolare a CD (*N.*51.); così le perpendicolari AH, EH, che partono dall' istesso punto H della linea CD, saranno insieme una sola retta AE fra i termini A, E: ma la linea ABE è altresì retta fra gli stessi termini; fra due punti vi sarebbero adunque due rette; il che è impossibile: egli è dunque ancora impossibile, che AH sia perpendicolare a CD.

53. COROLLARIO 1°. *Se dal punto* A (Fig. 26.) *preso fuori d' una retta* CD, *e che non è sopra 'l prolungamento di detta linea, tirasi una perpendicolare* AB, *e molt'altre linee, le quali chiameremo obblique, poichè non potrebbero esser perpendicolari sopra* CD; *dico* 1°. *Che la perpendicolare* AB *sarà la più breve di tutte le linee tirate dal punto* A *sopra* CD. 2°. *Che le altre saran tanto più lunghe, che verranno a segare la linea* CD *ne' punti* H, D, ec. *più lontani dal punto* B, *ove la perpendicolare sega questa linea.* 3°. *Che si troveranno quante si voglia obblique uguali due a due, ma giammai tre d' uguali.*

Prolungo la perpendicolare AB di là della linea CD in E; faccio BE = AB, e tiro la linea EH; perpendicolari essendo a CD la linea AB e'l suo prolungamento, gli angoli ABH, EBH son retti (*N.* 51.), ed in conseguenza uguali (*N.*45.): ora, i lati AB, BH dell'angolo ABH sono uguali ciascuno a ciascuno a' lati EB, BH dell'angolo EBH; e però la linea AH, che congiugne i termini de' lati AB, BH, è uguale alla linea EH, che congiugne i termini de' lati EB, BH (*N.*47.): ora, le due rette AB, BE formano una sola retta linea fra i punti A, E; dunque le due rette AH, HE non formano una sola retta fra gli stessi punti A, E, e sono conseguentemente più lunghe delle due AB, BE prese insieme: così la linea AH, metà delle due AH, HE, è più lunga della metà AB delle due AB, BE, e però la perpendicolare AB è più breve dell'obbliqua AH; e nello stesso modo si proverà, che la perpendicolare AB è più corta dell'obbliqua AD, ec. il che doveasi 1°. dimostrare.

Dal punto E tiro la retta ED all'estremità D d'un'altra obbliqua AD; e proverò, come prima, che ED = AD. Ora, le due rette uguali AH, HE tirate dai termini A, E della retta AE si segano infra le due rette AD, ED tirate dagli stessi punti A, E; dunque le due AH, HE prese insieme sono minori delle due AD, DE (*N.*38.), e perciò la retta AH, metà delle due AH, HE, è minore della retta AD, metà delle due AD, DE; così l'obbliqua AD, che sega CD in un punto D più distante dal piede B della perpendicolare AB, è più lunga dell'obbliqua AH, che sega CD in un punto H più vicino al medesimo piede B; il che doveasi 2°. dimostrare.

Sopra CD dall'altro lato del piede B della perpendicolare AB piglio prima la distanza BM uguale alla distanza BH, poscia la distanza BC uguale alla distanza BD, e finalmente dal punto A tiro le rette AM, AC; ed essendo la retta AB perpendicolare sopra CD, l'angolo ABH è uguale all'angolo ABM (*N.* 51.), ed i lati AB, BH dell'angolo ABH sono uguali ciascheduno a ciascheduno a' lati AB, BM dell'angolo ABM; dunque l'obbliqua AH, che congiugne i termini de' lati AB BH, è uguale alla retta AM, che congiugne i termini de' lati AB, BM (*N.* 47.), cioè uguali sono le due obblique AH, AM, le quali segano la retta CD in due punti H, M equidistanti dal piede B della perpendicolare AB; e con simil ragione si proverà essere uguali le due obblique AC, AD: ora, siccome d'amendue le parti del piede B della perpendicolare si posso-

no

no trovar quanti si voglia punti equidistanti due a due dal punto B, così ancora si troveranno quante si voglia obblique uguali due a due, ma giammai tre d'uguali; imperocch'e' converebbe, che due ve ne fossero dallo stesso lato della perpendicolare AB; e siccome non potrebbon queste due linee segare la retta CD in due punti equidistanti dal punto B, elle non potrebbero nè meno essere uguali; il che sarebbe contro la supposizioue.

54. COROLLARIO II. *Se dunque da un punto A, preso fuori d'una retta* CD, *sopra la stessa linea tiransi una perpendicolare* AB, *e due obblique uguali* AH, AM, *la perpendicolare* AB *segherà la retta* CD *in un punto* B *egualmente lontano dai punti* H, M, *in cui l'obblique segano la stessa linea* CD.

Quest'è una conseguenza del Corollario precedente; e quindi facilmente si conchiude, che *se due linee* AH, AM, *tirate sopra una retta* CD *da un punto esteriore* A, *sono uguali, esse sono due obblique, fra cui passar dee la perpendicolare tirata dal punto* A *sopra* CD. Imperocchè, se l'una di queste linee fosse perpendicolare a CD, ella sarebbe più corta dell'altra; il ch' è contro l'ipotesi.

55. COROLLARIO III. *La perpendicolare* AB, *tirata dal punto esteriore* A *sopra una retta* CD, *è la distanza del punto* A *alla retta* CD.

Questa perpendicolare è la linea più corta, che tirar si possa dal punto A sopra CD (*N.* 53.); e però essa è la distanza del punto A a detta linea (*N.* 9.).

56. COROLLARIO IV. *Se un punto qualunque d' una retta* ABE (Fig. 27.) *perpendicolare sopra un' altra retta* CD *è equidistante dai due punti* C, D *della retta* CD, *la stessa perpendicolare prolungata in infinito da amendue le parti passerà per tutt' i punti equidistanti da' punti* C, D.

Quì debbonsi provar due cose. 1°. Che tutt' i punti della perpendicolare ABE, prolungata in infinito da amendue le parti, sono equidistanti dai punti C, D. 2°. Che non può trovarsi alcun punto egualmente distante da' punti C, D, il quale non sia sopra la perpendicolare; ciò ch' io provo in tal guisa.

Se 'l punto della perpendicolare ugualmente distante da' punti C, D è'l punto B, in cui essa perpendicolare sega la retta CD, prendo qualsivoglia altro punto A sopra la stessa perpendicolare, e da detto punto a' punti C, D, tiro le rette AC, AD, le quali saranno due obblique tirate dal punto A della perpendicolare AB; e queste obblique saranno eguali, poichè segano la retta CD in punti egual-

mente diſtanti dalla perpendicolare (*N.* 53.) : ma queſte rette miſurano le diſtanze del punto A ai punti C, D ; dunque 'l punto A è ugualmente lontano da' punti C, D ; e ſiccome lo ſteſſo ſi proverà di qualunque altro punto preſo ſopra la perpendicolare , così ne ſegue, che tutt' i punti della medeſima retta ſono egualmente lontani da C, e D.

Che ſe'l punto della perpendicolare equidiſtante dai punti C, D è fuori della linea CD , come lo è A , tiro le rette AC, AD, che ſaranno in conſeguenza due obblique eguali; onde la perpendicolare ſegherà CD in un punto B egualmente lontano da' punti C, e D; e perciò io proverò come prima, che tutti gli altri punti della perpendicolare ſono equidiſtanti da C, e D; il che doveaſi 1°. dimoſtrare.

Ora ſe ſi pretende, che quantunque tutt'i punti della perpendicolare AE (*Fig.* 28.) ſieno equidiſtanti da' punti C, D della retta CD, poſſa nondimeno trovarſi qualche punto H fuori della perpendicolare AE, il quale ſia altresì ugualmente lontano dai punti C, D ; tiro dal punto H le rette HC, HD, che ſaranno uguali, e per conſeguenza amendue obblique ſopra CD (*N.* 54.) : così la perpendicolare tirata dal punto H ſopra CD ſegherà detta linea in un punto equidiſtante dai punti C, e D ; e però la ſegherà nel punto B, in cui ella è ſegata dalla perpendicolare AE: n' avverrebbe adunque, che ſopra un medeſimo punto B preſo ſopra CD ſi potrebbono tirar due rette AB, BH perpendicolari ſopra la linea CD ; il ch' è impoſſibile (*N.* 51.) , ed in conſeguenza egli è altresì impoſſibile, che 'l punto H ſia equidiſtante da C, e D.

57. COROLLARIO V. *Una ſteſſa linea non può eſſer perpendicolare ſopra due rette* AB, CD (Fig. 29.) , *che ſi ſegano in un punto* L.

Se vogliamo, che la linea DB, la quale ſega le rette AB, CD in due punti D, B differenti dal punto L, in cui dette rette ſi ſegano, ſia perpendicolare ſopra amendue di eſſe rette, ſaranno queſte reciprocamente perpendicolari ſopra d' eſſa (*N.* 51.) ; e in conſeguenza n' avverrà, che dal punto L, in cui dette linee ſi ſegano fuori della linea DB, potranſi tirar due perpendicolari LD, LB ſopra la ſteſſa retta DB; il ch' è impoſſibile (*N.* 52.) .

E ſe vogliamo, che la retta ML, la quale paſſa pel punto, in cui le due linee ſi ſegano, ſia perpendicolare ſopra l' una e l' altra, ſaranno le due linee reciprocamente perpendicolari ſopra di

eſſe

esse (*N.* 51.) ; ne avverrà dunque, che da un' istesso punto L d' una retta LM si potrebbero tirare due perpendicolari LD, LB da un medesimo lato; il che sarebbe ancora impossibile (*N.* 51.)

58. COROLLARIO VI. *Se una retta* AE (Fig. 27.) *è talmente disposta rispetto ad un' altra, che due de' suoi punti qualunque sieno equidistanti da due punti* C, D *della retta* CD; *cioè ch' il punto* A *sia equidistante da* C *e* D, *e'l punto* E *altresì equidistante da* C *e* D, *la retta* AB *sarà perpendicolare sopra* CD.

Dal punto A concepisco una perpendicolare tirata sopra CD, la quale prolungata d' ambe le parti in infinito passerà per tutt' i punti equidistanti da C, e D (*N. 56.*); e perciò ella passerà pel punto E: ma anche la retta AE passa pe' punti A, E; dunque essa non differisce dalla perpendicolare, poichè fra due punti non può tirarsi che una sola retta (*N.* 32.).

59. LEMMA. *Se dai termini* A, B *d'una retta* AB (Fig. 30.) *presi per centro, e con dei raggi* AE, BN, *i quali presi insieme sieno maggiori della retta* AB, *si descrivono due circonferenze* EPLQ, NPSQ; *elle non si segheranno ch' in due punti* P, Q, *l'uno di cui sarà da un lato della retta* AB, *e 'l secondo dall' altro.*

1°. Egli è evidente, che queste due circonferenze non si segheranno sopra la retta AB; imperocchè, essendo i loro raggi AE, BN presi insieme maggiori della retta AB, cadendo questi due raggi sopra AB avvanzeranno l' uno sopra l' altro, e l' estremità E del primo AE caderà più vicina al punto B, che l' estremità N al secondo BN. 2°. Queste due circonferenze si segheranno, imperocchè, descrivendo l' estremità E del raggio AE la semicirconferenza EPL dal lato di P, sempre più s' allontana dal centro B, e va a trovare la retta AB prolungata di là del punto A rapporto a B: per lo contrario l' estremità N del raggio BN, descrivendo la semicirconferenza, vie più si discosta dal centro A, e va a segare la linea AB prolungata di là del punto B; così le due semicirconferenze, prendendo strade interamente opposte, debbono segarsi in qualche parte; e lo stesso dicasi dell' altre due semicirconferenze, le quali sono dall' altro lato della linea AB.

Supponendo dunque, che P sia 'l punto, in cui si segano le due semicirconferenze EPL, NPS, io concepisco, che da detto punto sia tirata una perpendicolare PH sopra la retta AB, e che dal centro A sieno tirate delle rette AR, AR, ec. sopra tutt' i punti della stessa linea; essendo la retta AH perpendicolare sopra PH, le

rette

rette AR, AR, ec. sono obblique, e tutte più corte del raggio AP, il qual' è più lontano ch' esse dalla perpendicolare AH (*N*.53.): così quest' obblique non vanno a terminare all' arco PE contenuto fra 'l punto P, e la retta AB; imperocchè se ciò fosse, elle sarebbero uguali al raggio AP; e per conseguenza l'arco PE è interamente a destra della linea PH. Così pure, se dall' altro centro B tiransi delle rette BR, BR, ec. sopra tutt' i punti di PH, tutte queste rette saran più corte del raggio, e non anderanno a terminare all' arco PN, il quale sarà in conseguenza interamente a sinistra della linea PH; e poichè i due archi PE, PN delle semicirconferenze EPL, NPS sono separati dalla retta PH, non si segano ch' in P.

Prolungo la retta PH in X dalla banda di P, e dal centro A tiro sopra tutti i punti del prolungamento PX delle rette AZ, AZ, ec. le quali sono tante obblique tutte più lunghe del raggio AP, il qual' è più vicino di esse alla perpendicolare; così prima di segare la retta PX, esse segano l' arco PL, e per conseguenza l'arco PL è interamente a sinistra di PX. Così pure, se dall' altro centro B si tirano sopra PX le rette BZ, BZ, ec. segheranno queste l' arco PS prima di PX, e perciò quest'arco sarà interamente a destra di PX; onde gli archi PL, PS delle semicirconferenze EPL, NPS non si segheranno ch' in P, poichè sono separati dalla retta PZ: ora abbiam veduto, che gli altri due archi PE, PN non si segano ch' in P; dunque anche le semicirconferenze EPL, NPS composte di questi archi si segano solo in P, e lo stesso si proverà delle altre semicirconferenze EQL, NQS; e però le due intere circonferenze non si segano ch' in due punti, l' uno sopra, e l' altro sotto la retta AB.

60. LEMMA. *Una circonferenza di circolo non può segare una retta ch' in due punti.*

Se la linea AB (*Fig.* 31.*), la quale sega la circonferenza ne' punti A, B, passa pel centro O del circolo, la proposizione è per se evidente; poichè AB è composta de' due raggi AO, OB: così, se la circonferenza potesse segare il diametro in qualche punto preso fra l' estremità A, B, p. e. in P, la retta OP, contenuta fra 'l centro e questo punto P, sarebbe un raggio, e però in un medesimo circolo avremmo due raggi disuguali OP, OB, il ch' è impossibile. Similmente, se la circonferenza segasse i prolungamenti di AB in qualsivoglia punto Q, la retta OQ sarebbe un raggio, ed avremmo ancora due raggi disuguali OQ, OB; il ch' è impossibile.

Ma se la retta CD, la quale sega la circonferenza in due punti.

ti C, D, non passa pel centro O, tiro dal centro O ai termini C, D di detta linea i due raggi OC, OD, che per essere uguali saranno in conseguenza due linee oblique uguali tirate dal punto esterno O sopra la retta CD (*N.* 54.), e la perpendicolare del punto O sopra CD segherà detta linea in un punto D equidistante da C, e D: ora, tutte le linee OR, OR, ec. tirate dal punto O sopra tutt'i punti della retta CD presi fra i due raggi OC, OD saranno più corte di questi stessi raggi, perciocchè saran più vicine alla perpendicolare (*N.* 53.), e non anderanno a terminare alla circonferenza; dunque la circonferenza non potrebbe segare detta linea *in* alcuno di essi punti: così ancora tutte le linee OS, OS tirate dal punto O sopra i prolungamenti *della retta* CD saran più lunghe de' raggi, poichè saranno più distanti dalla perpendicolare; dunque la circonferenza non passerà pel loro termine S, S, ec. e perciò ella non sega la retta CD ch'in due punti C, D.

61. Dicesi *alzare una perpendicolare*, quando da un punto B (*Fig.* 27.) preso sopra una retta CD si tira una retta BA perpendicolare a CD; e dicesi *tirare*, od *abbassare una perpendicolare*, quando da un punto A preso fuori d' una retta CD, e che non è nel suo prolungamento, tirasi una perpendicolare CD.

62. PROBLEMA. *Da un punto* B (Fig. 32.) *preso sopra una retta* CD *alzare una perpendicolare a detta linea.*

Prendo un'apertura di compasso ad arbitrio, ch' io porto sopra la linea CD, da B in M e da B in N per avere i due punti M, N equidistanti dal punto B; facendo centro ne'due punti M, N, descrivo con un' apertura di compasso maggiore della precedente, cioè maggiore di MB, o BN, due archi PQ, RS, che si tagliano da un'istesso lato della linea CD in un punto A, poichè i due raggi presi insieme sono maggiori della retta MN (*N.* 59.); e dal punto A, in cui detti archi si segano, tiro al punto B la retta AB, ch'è la perpendicolare cercata.

Imperocchè, essendo stati gli archi descritti con raggi uguali, le rette AM, AN sono eguali, e'l punto A della linea AB è equidistante dai punti M, N della retta CD: ora, anche il punto B della stessa retta AB è equidistante da' punti M, N; onde AB è perpendicolare sopra CD (*N.* 58.).

63. PROBLEMA. *Da un punto* A *preso fuori d' una retta* CD (Fig. 33.), *e che non è ne' suoi prolungamenti, tirare una perpendicolar sopra* CD.

Facendo centro nel punto A, con un'apertura di compasso assai grande

grande per poter segare la retta CD descrivo un' arco, il quale taglia detta linea in due punti M, N; presi gl' istessi punti per centro, colla stessa apertura di compasso maggiore della metà di MN descrivo due archi PQ, RS, i quali si segano nel punto O; e dal punto A pel punto O tiro la retta AO, ch' io prolungo finchè seghi CD in B, e la retta AB sarà la perpendicolare cercata.

Poichè, uguali essendo i raggi AM, AN dell'arco MN, il punto A è equidistante da' punti M, N della retta CD: parimente, uguali essendo i raggi MO, NO degli archi PQ, RS, il punto O è altresì equidistante da' medesimi punti M, N; dunque la retta AB, che passa per i due punti A, O, è perpendicolare sopra CM (*N.* 58.).

64. PROBLEMA. *Dividere una retta* CD (Fig. 34.) *in due parti uguali.*

Facendo centro ne' termini C e D della retta CD, colla stessa apertura di compasso maggiore della metà di CD descrivo due archi di circolo PQ, RS, che si segano in due punti A, B dall'una e dall'altra parte di CD per essere i due raggi pres'insieme maggiori di CD (*N.* 59.); e da' punti A, B io tiro la retta AB, che divide CD in E in due parti uguali.

Imperocchè, uguali essendo per la costruzione i raggi CA, DA, il punto A è equidistante da' medesimi termini C, D della retta CD; e parimente, per l'uguaglianza de'raggi CB, DB, il punto B è equidistante dagl' istessi termini C, D; dunque la retta AB, che passa pe' due punti A, B, è perpendicolare sopra CD (*N.*58.), e passa per tutti i punti equidistanti da C, e D (*N.* 56.): così'l punto E, in cui la retta AB sega CD, è equidistante da C, e D; e la retta CD è divisa in due parti eguali in E.

65. PROBLEMA. *Dividere un' angolo* ABC (Fig. 35.) *in due parti eguali.*

Facendo centro nel vertice B, con un' apertura di compasso ad arbitrio descrivo un' arco ANC fra i lati dell' angolo dato; dall' estremità A, C di detto arco, con un' apertura di compasso maggiore della metà della retta AC tirata fra gl' istessi termini A, C io descrivo due archi PQ, RS, i quali si segano in H; e dal punto H pel vertice B tiro la retta AB, che sega l' angolo ABC in due parti uguali.

Imperocchè, uguali essendo per la costruzione i raggi AB, CB, il punto B della retta HB è equidistante da' termini A, C della retta AC; e per l' uguaglianza de' raggi AH, CH il punto H della

la ſteſſa retta HC è equidiſtante da' termini A, C; dunque la linea HB ſega AC in due parti eguali in M (*N.* 64.), e le è perpendicolare (*N.*58.): così gli angoli AMB, CMB ſono retti, e fra loro uguali; ed i lati AM, MB del primo ſono uguali ciaſcheduno a ciaſcheduno ai lati CM, MB del ſecondo; ora, le rette AB, CB congiungono l'eſtremità di queſti lati; e però l'angolo ABM è uguale all' angolo CBM (*N.* 47.): ma queſti due angoli ABM, CBM formano l'angolo ABC; queſt'angolo è dunque diviſo per mezzo dalla retta HB.

66. PROPOSIZIONE VII. *Se una retta* AB (Fig. *36.*) *muoves' in modo, che la ſua eſtremità* A *ſcorra ſucceſſivamente tutt'i punti d' una retta* AC *prolungata anche in infinito, e che durante il moto la retta* AB *ſia ſempre perpendicolare alla retta* AC, *l' altra eſtremità* B *della linea* AB *deſcriverà una linea* BM *indefinita, che ſarà una retta.*

Poichè la linea AB è ſempre perpendicolare ſopra AC, e perchè 'l ſuo termine A giammai abbandona detta linea, tutt'i punti della linea BM ſono in egual diſtanza da AC (*N.* 55.). Così, ſe ſi concepiſce, che la linea BM ſi muova verſo la linea AC, in modo che tutti li ſuoi punti facciano egual cammino, egli è evidente, che giunto l'uno de'ſuoi punti ſulla linea AC, ſopra la ſteſſa giunti ſaranno parimente gli altri ſuoi punti, e ch'in conſeguenza BM caderà tutta ſopra AC: ma la linea AC è retta; dunque lo è anche la linea BM.

67. DIFFINIZIONE. Due rette AC, BM (Fig. *36.*) ſi dicono *tra loro Parallele*, quando mantengono ſempre la ſteſſa diſtanza fra loro, cioè, quando uguali ſono le perpendicolari tirate da tutt' i punti dell'una BM ſopra l' altra AC, o finalmente, quando l'una di eſſe BM è formata dal moto d' una retta AB, ſempre perpendicolare ſopra l'altra, e'l cui termine A giammai abbandona AC, come s'è detto nella precedente Propoſizione.

68. COROLLARJ. Dunque, 1°. *Qualunque perpendicolare* BA, *tirata da qualſivoglia punto* B *dell' una delle parallele* BM *ſopra l' altra* AC, *miſura la diſtanza delle due parallele.*

Tutt'i punti di BM ſon diſtanti da AC d'una quantità uguale a BA; dunque BA è la diſtanza della retta BM alla ſua parallela AC: ora, la diſtanza della retta AC alla retta BM non può differire dalla diſtanza della retta BM alla retta AC; onde BA miſura anche la diſtanza di AC a BM.

Dunque, 2°. *Qualunque linea* BA *compreſa fra le due paralle-*

le, e perpendicolare sopra l'una AC, *è perpendicolare anche sopra l'altra* BM.

Poichè le rette BM, AC mantengono sempre la stessa distanza fra loro, se dal punto A tiro una perpendicolare sopra BM, essa misurerà la distanza di AC a BM. Ora, non può la distanza di AC a BM differire dalla distanza di BM ad AC, cioè della retta BA, che s'è tirata perpendicolare sopra AC; dunque la perpendicolare tirata da A sopra BM esser dee uguale a BA: ma ciò sarebbe impossibile, se la perpendicolare tirata dal punto A cadesse in un'altro punto B; imperocchè AB sarebbe in tal caso obbliqua sopra BM, e maggiore della perpendicolare (*N.* 53.); dunque BA esser dee perpendicolare tanto a BM, quanto ad AC.

E quindi provasi agevolmente il contrario, cioè, che *se una linea* AB *è perpendicolare ad altre due* BM, AC, *queste due linee* BM, AC *sono tra loro parallele.*

Poichè se vogliamo, che BM non sia parallela ad AC, si concepisca, che per lo punto B si faccia passare una parallela ad AC; essendo la retta AB perpendicolare sopra AC, sarà pure perpendicolare sopra la sua parallela: ma AB è anche perpendicolare sopra BM; egli convien dunque, che BM e la parallela tirata dal punto B sieno la stessa linea; altrimenti una retta AB sarebbe in un medesimo punto B perpendicolare sopra due differenti linee; il che è impossibile (*N.* 57.).

Dunque, 3°. Per la sopr'accennata ragione *non si potrebbero da un medesimo punto* B *tirare due parallele ad una stessa linea* AC.

Dunque, 4°. *Due perpendicolari* AB, TR *fra due parallele* AC, BM *sono parallele fra loro.*

Imperocchè la linea AC, od AT è ad amendue perpendicolare.

Dunque, 5°. *Le parti* AT, BR *delle parallele contenute fra due perpendicolari* AB, TR *sono fra loro uguali.*

Le perpendicolari AB, TR sono tra loro parallele, come s'è veduto, e le parti AT, BR sono ad esse perpendicolari; dunque, per la diffinizione delle parallele, le parti AT, BR sono uguali.

69. DIFFINIZIONE. Se una retta RS (*Fig.* 37.) taglia due parallele BM, AC, 1°. Gli angoli BHE, CEH, da essa formati entro le parallele, l'uno BHE in alto ed a sinistra, e l'altro CEH a basso e a dritta, diconsi *alterni*; così alterni sono ancora gli angoli MHE, AEH. 2°. Gli angoli MHR, CER, che dallo stesso lato colle parallele vengono formati dalla retta RS, diconsi *angoli dal medesimo lato, o dalla stessa banda, o parte*; dunque *angoli*

goli dal medesimo lato sono altresì gli angoli MHS, CES, come pure gli angoli BHR, AER, e gli angoli BHS, AES. 3°. Gli angoli MHE, CEH, formati da RS entro le parallele dal medesimo lato, diconsi *angol' interni opposti*; così *interni opposti* sono ancora gli angoli AEH, BHE.

70. PROPOSIZIONE VIII. *Se una retta* RS (Fig. 38.) *sega due parallele* BM, AC, *gli angoli alterni* BHE, CEH *saranno eguali*.

Dal punto E sopra BM io abbasso la perpendicolare EV, e dal punto H sopra AC tiro la perpendicolare HT; gli Angoli retti EVH, HTE sono eguali, e poichè uguali sono le perpendicolari EV, HT (*N. 67.*), e le parti VH, ET delle parallele comprese fra le stesse perpendicolari (*N. 68.*), i due angoli eguali EVH, HTE hanno i lati uguali ciascuno a ciascuno: ora, la retta HE passa per l'estremità di essi lati; dunque l'angolo EHV formato da questa retta col lato EH del primo angolo EVH è uguale all'angolo HET formato col lato ET del secondo HTE (*N.47.*): ma gli angoli EHV, HET sono simili agli alterni BHE, CEH; onde gli angoli alterni sono eguali.

71. COROLLARIO I°. *Gli angoli dalla stessa parte* RHM, HET *sono eguali*.

L'angolo BHE è uguale all'angolo RHM, che gli è opposto al vertice (*N. 49.*), e'l medesimo angolo BHE è uguale al suo alterno HET (*N. 70.*); uguali son dunque gli angoli RHM, HET.

72. COROLLARIO II. *Gli angoli interni opposti* MHE, CEH *sono eguali a due retti*.

L' angolo RHM e 'l suo conseguente MHE sono eguali a due retti (*N. 49.*): ora, l'angolo CEH è uguale all' angolo RHM (*N. 71.*); dunque anche gli angoli CEH ed MHE sono eguali a due retti.

73. COROLLARIO III. Egli è altresì vero l'opposto di questa Proposizione, e de' suoi Corollarj; cioè, *se una retta* RS, *che sega due altre rette* BM, AC, *forma uguali gli angoli alterni*, *o gli angoli della stessa parte*, *ovvero gli angoli interni opposti uguali a due retti*, *le linee* BM, AC *saranno parallele*.

Poichè se vogliamo, che BM non sia parallela ad AC, si concepisca, che dal punto H tirisi una parallela alla retta AC; la linea RS, che segherà le due parallele, con loro farà adunque uguali gli angoli alterni, ec. e per conseguenza l'angolo, che verrà for-

 mato

mato dalla parallela tirata dal punto H colla linea RS dalla parte di S, sarà uguale all'angolo TEH: ma l'angolo formato dalla linea BH con RS dalla parte di S è altresì uguale all'angolo TEH; onde la linea BH sarà necessariamente simile alla parallela tirata dal punto H, e per conseguenza le rette BH, o BM, ed AC son parallele.

74. COROLLARIO. IV. *Se due rette* HE, SR (Fig. 39. 40.) *sono egualmente inclinate sopra l'una delle parallele* AC, *sono pure egualmente inclinate sopra l'altra* BM.

Le due linee HE, SR possono essere ugualmente inclinate ad AC o dalla stessa banda, o da differente verso: se sono egualmente inclinate dalla stessa banda (*Fig.* 39.), gli angoli HEC, SRC son dunque uguali (*N.* 71.); e però gli angoli EHB, RSB ch'eguali souo a' loro alterni HEC, SRC sono altresì uguali, e le rette HE, SR sono ugualmente inclinate sopra BM; e se le rette HE, SR sono ugualmente inclinate sopra AC da un differente verso (*Fig.* 40.), gli angoli HER, SRE saranno dunque uguali; e però uguali saranno ancora i loro alterni EHB, RSM, e le due rette HE, RS saranno ugualmente inclinate sopra BM in un differente verso.

75. PROPOSIZIONE IX. *Le rette* EH, RS (Fig. 39.) *ugualmente inclinate da un medesimo lato fra due parallele* AC, BM *sono tra loro parallele, ed uguali.*

La linea AC, che sega le rette EH, RS, forma gli Angoli HEC, SRC dalla stessa parte uguali, per essere le linee ugualmente inclinate dalla stessa parte; dunque EH, RS sono parallele (*N.* 73.); il che doveasi 1°. dimostrare.

Da' punti H, S conduco sopra AC le perpendicolari HT, SV; così gli angoli BHT, ESV sono retti (*N.* 68.), ed uguali; perciò da detti angoli sottraendo gli angoli uguali BHE, BSR (*N.* 74.), i rimanenti EHT, RSV sono eguali: ora, uguali sono gli angoli retti HTE, SVR; onde ponendo la figura RVS sopra la figura ETH, in modo che la perpendicolare SV cada sopra la sua eguale HT, l'angolo retto RVS caderà sul suo uguale ETH, e l'angolo RSV sul suo uguale EHT; dunque le due linee SR, RV caderanno sopra le due HE, ET, e lor saranno uguali ciascheduna a ciascheduna; e però l'inclinate EH, SR sono uguali; il che doveasi 2°. dimostrare.

La seconda parte di questa Proposizione è altresì vera, quando l'ugualmente inclinate fra le parallele son' inclinate in un verso diffe-

differente (*Fig.* 40.) ; ciò che proverassi nello stesso modo.

76. COROLLARIO I°. *Le parti* SH, ER (Fig. 39.) *delle parallele contenute fra l'ugualmente inclinate da un medesimo lato sono uguali.*

Ora s'è veduto, che le rette ET, RV sono uguali; aggiugnendo dunque TR a ciascheduna di queste rette, avremmo ER = TV: ma a cagione delle perpendicolari HT, SV noi abbiamo TV = HS; dunque HS = ER.

77. COROLLARIO II. *Se due linee* HE, SR (Fig. 39.) *sono parallele fra due parallele* BM, AC, *esse sono egualmente inclinate fra queste parallele, ed uguali.*

Essendo le linee HE, SR parallele fra loro, la retta AC, che le sega, forma gli angoli HEC, SRC dallo stesso lato uguali (*N.* 71.) ; queste linee son dunque egualmente inclinate dalla stessa banda ; e perchè sono ugualmente inclinate, perciò sono uguali (*N.* 75.).

78. PROPOSIZIONE X. *Se due punti* H, S (Fig. 39.) *d'una retta* BM, *prolungata anche in infinito, sono equidistanti da una retta* AC, *prolungata parimente in infinito, ch'è da una medesima parte per rapporto a detti punti, la retta* BM *è parallela ad* AC, *e passa per tutt'i punti, i quali tanto sono lontani da* AC *dalla stessa banda, quanto i punti* H, S.

Essendo i punti H, S in ugual distanza da AC, le perpendicolari HT, ec. tirate da essi punti sopra AC, sono uguali (*N.*55.); si concepisca dunque, che la perpendicolare HT muovas' in modo, che 'l suo termine T scorra tutti i punti della retta AC, e che durante questo moto la retta HT sia sempre perpendicolare ad AC; egli è evidente, che quando 'l punto T caderà sul punto V, la perpendicolare HT caderà sulla perpendicolare SV, che l'è uguale; imperocchè si potrebbero altrimenti da un'istesso punto V alzare due perpendicolari sopra AC, il che è impossibile (*N.* 51.): ora, durante questo moto l'altro termine H della perpendicolare HT descriverà una linea HS, la qual sarà retta (*N.* 66.), e questa prolungata in infinito sarà parallela ad AC (*N.* 67.) ; dunque la retta BM, che passa per i due punti H, S della retta HS, e che per conseguenza non differisce dalla retta HS prolungata in infinito (*N.* 34.), è altresì parallela ad AC ; il che doveasi 1°. dimostrare.

Ora essendo BM parallela ad AC, egli è evidente, che tutt' i suoi punti son tanto lontani da AC, quanto lo sono i punti H, S:

ma

ma ſe ciò non oſtante noi vogliamo, che dallo ſteſſo lato trovi ſi qualche punto, come P, il quale ſia tanto diſtante da AC, quanto lo ſono i punti H, S, e che nondimeno non ſia ſopra BM; dal punto H al punto P io tiro la retta HP, la quale ſarà parallela ad AC per eſſere i ſuoi due punti H, P equidiſtanti da AC, e però ſi potranno da un'iſteſſo punto H tirar due parallelle HP, HM ad una ſteſſa retta AC; il che è impoſſibile (*N.* 68.).

79. PROBLEMA. *Da un dato punto* H (Fig. 39.) *preſo fuori d' una retta* AC, *e che non è nel ſuo prolungamento, tirare una parallela ad* AC.

Dal punto H abbaſſo una perpendicolare HT ſopra AC; da un' altro punto V preſo ſopra AC alzo ſopra AC una perpendicolare VS, ch' io faccio uguale ad HT; e la retta HS, tirata dall' eſtremità H, S delle perpendicolari, ſarà la parallela cercata; poichè i due punti H, S, per cui ella paſſa, ſono equidiſtanti dalla retta AC; il che la rende parallela (*N.* 78.).

Ovvero, dal dato punto H (*Fig.* 41.) io tiro ſopra AC un' obbliqua HR, e facendo in H un' angolo RHP uguale all' angolo HRA, il lato PH dell' angolo RHP ſarà la parallela ricercata, a cagione degli angoli alterni uguali RHP, HRA.

80. AVVERTIMENTO. Quando ſi dà la diffinizione delle parallele ordinariamente, le s'aggiugne, *che mai converrebbero inſieme, ancorchè ſi prolungaſſero in infinito*; ma parve a me, che baſtaſſe il dire, che *mantengono ſempre la ſteſſa diſtanza*; eſſendo per ſe manifeſto, che s'elle mantengono ſempre la ſteſſa diſtanza, mai poſſono convenire inſieme, quantunque ſi prolunghino in infinito.

81. PROPOSIZIONE XI. *Se una retta* PQ (Fig. 42. 43.) *è parallela all' una delle due parallele* BM, AC, *è parallela anche all' altra*.

Può darſi, che la retta PQ parallela a BM ſia fra le parallele BM, AC (*Fig.*42.), o di là d' AC (*Fig.*43.), o di là da BM (*Fig.* 44.).

Se PQ paſſa fra le parallele BM, AC, io tiro fra eſſe la perpendicolare HT, che ſega PQ in E; e parallele eſſendo per ipoteſi PQ e BM, la retta HE perpendicolare a BM è perpendicolare anche a PQ (*N.* 68.): Ora, il prolungamento ET della retta HE è altresì perpendicolare ſopra PQ (*N.* 51.), e queſto ſteſſo prolungamento è perpendicolare ancora ad AC, per eſſere la linea HET perpendicolare ſopra AC; onde le rette PQ, AC ſon parallele (*N.* 68.).

Se

Se PQ parallela a BM è di là d'AC, fra dette due linee tiro la perpendicolare HE, e la parte HT di questa perpendicolare farà perpendicolare ad AC, per essere BM, AC parallele(*N.*51.): ora, il prolungamento TE di HT è altresì perpendicolare sopra AC (*N.* 51.), e lo stesso prolungamento è perpendicolare sopra PQ, poichè l'intera linea HE è perpendicolare sopra PQ; le linee AC, PQ son dunque parallele (*N. 68.*): finalmente, se PQ parallela a BM è di là da BM (*Fig.* 44.), tiro fra queste due linee la perpendicolare HE, ed in conseguenza, essendo 'l prolungamento HT di questa perpendicolare altresì perpendicolare sopra BM (*N.* 51.), e' lo sarà pure sopra AC parallela a BM (*N. 68.*); dunque la retta EHT sarà perpendicolare a PQ, e ad AG; e queste due rette saranno parallele [*N. 68.*].

82. COROLLARIO. *Se dunque due rette* BM, AC *son parallele ad una terza* PQ, *esse sono parallele fra loro.*

Imperocchè, 1°. Se la retta PQ è fra le due BM, AC (*Fig.*42.), io prendo sopra PQ un punto E, d'ambe le cui parti alzo delle perpendicolari sopra PQ, che vadino a segare le rette BM, AC: così parallele essendo BM e BQ, la perpendicolare EH sarà parimente perpendicolare a BM (*N. 68.*); e parallele essendo pure AC e PQ, la perpendicolare ET sarà altresì perpendicolare ad AC (*N. 68.*): ora, le due perpendicolari EH, ET a PQ fanno insieme una sola retta HE (*N.* 51.); essendo dunque questa retta HE perpendicolare sopra le due BM, AC, dette due linee sono parallele (*N. 68.*). 2°. Se la retta PQ è di là dalle due BM, AG, per esempio di là da AC (*Fig.* 43.), tiro fra PQ e la parallela BM la perpendicolare EH; e poichè AC è similmente parallela a PQ, la parte ET della perpendicolare EH sarà altresì perpendicolare sopra AC (*N.68.*); onde il prolungamento TH della parte ET essendo anche perpendicolare sopra AG, come lo è sopra BM, le rette BM ed AC saranno parallele (*N. 68.*): e lo stesso si proverebbe, se PQ fosse di là da BM.

83. PROPOSIZIONE XII. *Se da qualsivoglia punto* A (Fig.45.) *preso fuori d'una retta* BM *prolungata anche in infinito, tiransi sopra detta retta una perpendicolare, e molte inclinate* AB, AD, AH, *ec. la perpendicolare sarà sempre dalla banda degli angoli minori formati dall'oblique colla retta* BM, *e l'oblique più lunghe saranno le più inclinate.*

Dal punto H, in cui l'obbliqua AH taglia la retta BM, io alzo la perpendicolare HL, che lascierà il punto A alla sua drit-

ta,

ta, o alla sua sinistra; perocchè, se passasse per A, ell' avrebbe due punti H, A comuni colla dritta AH, e per conseguenza sarebbe simile all' obbliqua AH (*N.* 34.), e non sarebbe perpendicolare a BM: supponiamo adunque, ch'il punto A sia a sinistra di HL; gli angoli LHB, LHM, formati dalla perpendicolare sopra BM, sono retti (*N.*51.), ed in conseguenza vagliono insieme due retti, siccome due retti vagliono parimente gli angoli conseguenti AHB, AHM formati dall'obliqua AH con la stessa retta BM (*N.*49.): ora, essendo 'l lato AH dell' angolo AHB a sinistra della perpendicolare, l'angolo AHB è minore dell'angolo retto LHB; e però l' altro angolo AHM è maggiore dell'altro angolo retto LHM; così l' angolo AHB è'l minore de' due angoli, formati dall' inclinata AH sopra BM: ora, se la perpendicolare abbassata dal punto A sopra BM tagliasse questa retta dalla parte dell'angolo maggiore AHM, dovrebbe 1°. segare la perpendicolare HL in qualche punto S; e quindi n'avverrebbe, che da un medesimo punto S preso fuori d'una retta BM potrebbonsi tirare due perpendicolari SH, SM; il ch'è impossibile (*N.* 52.): bisogna dunque, che la perpendicolare tirata dal punto A seghi BM in qualche punto E dalla banda dell' angolo minore AHB formato dall' obbliqua AH con BM; e così dell'altre. Ciò che doveasi 1°. dimostrare.

Sieno le due obblique AB, AD dallo stesso lato della perpendicolare AE; dal punto B, in cui la più lontana taglia la linea EM, io tiro una retta BR parallela all' altra obbliqua AD; così, segando BM le parallele BR, DA, uguali sono gli angoli dallo stesso lato RBM, ADM (*N.*71.): ora, perciocchè l'obbliqua BA sega queste due parallele, l' angolo ABM è minore dell' angolo RBM; egli è dunque minore dell' angolo ADM; e però l' obbliqua AB, più lunga dell'obliqua AD, è altresì più inclinata a BM che AD.

Se l' obbliqua più lunga AB è dal lato di B per rapporto alla perpendicolare AE, e che l'altra obbliqua più corta AH sia dall' altro lato, piglio da questo stesso lato un' obbliqua AM uguale all'obbliqua AB: così le distanze EB, EM dal piede della perpendicolare AE a' punti B, M dell' oblique sono uguali (*N.*54.); e gli angoli uguali AEB, AEM hanno i lati AE, EB uguali ciascuno a ciascuno a' lati AE, EM; dunque l' angolo ABM formato col lato BE dalla linea AB, che congiugne i termini de' lati del primo angolo AEB, equivale all' angolo AME formato col lato ME dalla linea AM, che congiugne i termini de' lati del se-

condo

secondo AEM (*N.* 47.) : ora, essendo l'obbliqua AM maggiore dell'obbliqua AH, ch'è dallo stesso lato, ell'è altresì più inclinata a BM di quello sia AH, come s'è già provato ; onde l'obbliqua AB, la qual'è sì inclinata che l'obbliqua AM, è parimente più inclinata di AH, ch'è più corta di essa ; il che doveasi 2°. dimostrare.

84. COROLLARIO. *L'obblique uguali sono dunque ugualmente inclinate sopra* BM, *e con esse formano angoli uguali* ; ciò che provasi, come abbiam fatto riguardo all'obblique uguali AB, AM.

85. AVVERTIMENTO. Ad Euclide rinfaccioſsi mai sempre d'aver preso come assioma, che *prolungate d'ambe le parti due linee, le quali non sieno parallele, debbono segarsi*; e la ragione che adducono si è, perchè nella Geometria vi sono delle linee, che sempre più s'avvicinano, e che nondimeno giammai si segano ; e perchè dall'altro canto si potea da Euclide dimostrare quest'assioma: ora, se legitimo fosse questo rimprovero, potrebbesi ancora rimproverare, chi senza prova asserisse, che *due rette, le quali si segano, sempre più tra loro s'allontanano, a misura che s'allontanan dal punto in cui si segano ; e che due linee, le quali sono più vicine ad un lato che ad un'altro, vie più s'allontanano, andando dalla minore alla maggior distanza, e vie più s'avvicinano, andando dalla maggiore alla minor distanza*. 1°. Perchè dimostrar si possono queste due proposizioni ; 2°. Perchè dall'altra parte vi sono nella Geometria certe linee, le quali non hanno tali proprietà. Acciocchè dunque non mi s'imputi, ch'io mi serva d'ipotesi, e a fine di far conoscere, che si può benissimo provare ciò che si propone, senza ricorrere al metodo, e senza conservar l'ordine, di cui s'è servito Euclide; ecco in qual modo io dimostro queste tre Proposizioni.

86. PROPOSIZIONE XIII. *Se due rette si segano, vie più fra loro s'allontanano, a misura che s'allontanan dal punto, ov'elle si segano.*

Le due rette AB, AC (*Fig.* 46.) si segano in A ; se vogliamo, ch'esse vie più non s'allontanino, a misura che s'allontanan dal punto A, converrà, che sopra AB trovinsi de'punti, quali sono D ed E, equidistanti dalla retta AC, o di cui 'l più lontano E dal punto A trovisi più vicino alla retta AC che 'l meno distante D.

Se dunque si vuole, ch'i punti D, E sieno in ugual distanza d'AC, la retta DE, che passerà per detti due punti, sarà parallela

ad AC (*N.* 78.): ora, questa retta DE è parte della retta AB, che sega AC; ne seguirebbe adunque, ch' una retta AB avrebbe una parte DE parallela ad una retta AC, e un' altra parte DA, che segherebbe questa stessa retta; il che è impossibile, perocchè due parallele, quantunque prolungate in infinito, mantengono sempre la stessa distanza.

Se noi vogliamo, ch' il punto E della retta AB, il qual' è più distante dal punto A ch' il punto D, sia nondimeno più vicino alla retta AC del punto D; tiro da D una retta DM parallela ad AC, e conseguentemente tutt' i punti di questa parallela saranno tanto distanti dalla retta AC, quanto lo è 'l punto D; e siccome supponesi, ch' il punto E sia più vicino ad AC ch' il punto D, converrebbe necessariamente, ch' il punto E fosse infra le parallele DM, AC, come in P: ora, la retta AB sega la parallela DM in D, ed essendo per conseguenza questa retta giunta in D, passa di là dalla parallela; a fine dunque ch' ella passasse per P, converrebbe, che segasse la parallela DM in un' altro punto: ma non può una retta segarne un' altra in due punti (*N.* 35.); e però egli è impossibile, ch' il punto E sia più vicino ad AC del punto D; convien dunque che tutt' i punti di AB vie più si discostino d' AC, a misura che s' allontanan dal punto A.

87. PROPOSIZIONE XIV. *Se due rette* AB, CD (Fig. 47.) *non mantengono sempre ugual distanza, prolungate in infinito vie più s' allontanano, andando dalla minore alla maggior distanza, e vie più s' avvicinano, andando dall' altro verso.*

Il punto A della linea AB è più vicino alla linea CD dell' altro punto B; dal punto A tiro la retta AM parallela a CD, e di cui tutt' i punti sono per conseguenza distanti da CD, quanto 'l punto A: così, essendo 'l punto B della linea AB più distante da CD ch' il punto A, la linea AB è rispetto a CD di quà dalla linea AM. Ora AB sega la linea AM; onde, per la precedente proposizione, tutt' i suoi punti, andando da A in B, e di là da B, vie più s' allontanano da CD parallela ad AM.

Ora, s' io prolungo BA di là dal punto A in S, ed AM di là dal punto A in R, il prolungamento AS di BA passerà dall' altro lato della parallela MR, che da essa vien segato, e in conseguenza 'l prolungamento sarà fra le due parallele RM, CD; e siccome, per la precedente proposizione, AS vie più si discosterà da AR, a misura ch' ella s' allontanerà dal punto A, ne segue, che AS vie più s' avvicinerà a CD prolungata; dunque, ec.

88. PRO-

88. PROPOSIZIONE XV. *Se due rette* AB, CD (Fig. 48.) *non conservano sempre la stessa distanza, prolungate che sieno dal lato delle loro distanze minori debbono segarsi.*

Dai punti A, B della retta AB abbasso sopra la retta CD prolungata, se sia d'uopo, le perpendicolari AR, BD; e trovando essere AR più corta di BD, io scorgo, che'l punto A della linea AB è più vicino a CD dell'altro punto B. Dal punto più prossimo A abbasso sopra BD la perpendicolare AM: così, perpendicolare essendo la linea BD alle due AM, CD, esse son parallele (*N. 68.*); e per conseguente, essendo 'l punto M della linea AM in ugual distanza dalla linea CD del punto A, esser dee meno distante da CD, ch'il punto B della retta AB; cioè la perpendicolare AM taglia sopra BD una parte BM. Porto più volte sopra BD la parte BM, finchè io passi di là dal punto D; per esempio, da M in N, e da N in P, ch'è di là dal punto D; la qual cosa è sempre possibile, perocchè infinita non essendo la linea BD, C potendosi ancora prolungare di là da'punti B, e D) essa non potrebbe infinite volte contenere la sua parte BM; da' punti di divisione N, P alzo sopra BP delle perpendicolari indefinite NS, PV, le quali saranno parallele alle rette AM, CD, per essere BD perpendicolare sopra tutte queste linee (*N. 68.*): ora, posto questo.

Perpendicolari essendo sopra DC le rette ARL, BDP, esse sono fra loro parallele (*N. 68.*), e perpendicolari sopra le rette AM, NS, PV parallele a CD (*N. 68.*): così le loro parti AQ, MN comprese fra le parallele AM, NS sono uguali (*N. 77.*); e siccome per la costruzione MN è uguale a BM, così AQ è uguale a BM; prendendo dunque sopra NS la parte QS uguale ad MA, gli angoli BMA, AQS sono eguali, ed hanno i lati uguali ciascuno a ciascuno; quindi è, che tirando la linea SA, che congiugne i termini de' lati dell'angolo AQS, essa col lato AQ di detto angolo formerà un'angolo SAQ uguale all'angolo ABM formato dalla retta AB col lato BM dell'altro angolo BMA (*N. 47.*): ora, essendo la linea BA fra le due parallele BD, AR, s'ella si prolungasse dal lato di A, sarebbe in A colla parallela AQ un'angolo uguale all'angolo dalla stessa banda ABM (*N. 71.*), ed in conseguenza uguale all'angolo SAQ; non può dunque il prolungamento di BA esser differente dalla linea AS, e la linea BA prolungata segar dee la retta SN.

Dal punto S tiro la retta ST perpendicolare sopra CD prolun-

 gata,

gata, ed essendo la stessa ST prolungata in X, ella è altresì perpendicolare sopra PV parallela a DT (*N. 68.*), e sarà in oltre parallela a BP, ch'è parimente perpendicolare sopra DT (*N.68.*): così le rette SX, NP perpendicolari fra le parallele SN, TD sono uguali (*N.67.*); e per essere NP = BM avremo SX = BM; prendendo dunque sopra PV la parte XV uguale ad AM, e tirando la retta VS, gli angoli BMA, SXV sono uguali, ed hanno i lati uguali ciascuno a ciascuno; quindi è, che noi proveremo come sopra, che l'angolo ABM è uguale all'angolo VSX: ma se la retta BA, già prolungata in S, fosse anche prolungata di là da S, con la retta SX parallela a BP farebbe in S un'angolo uguale all'angolo ABP (*N. 71.*), e per conseguenza uguale all'angolo VSX; non dee adunque 'l secondo prolungamento SV della retta AB esser differente dalla retta SV; e però AB prolungata in S, e poscia di là da S, segar dee la retta PV: onde molto più la retta AB prolungata taglierà in qualche punto E la retta CD prolungata; imperocchè, essendo ella sempre fra le sue due parallele SN, PV, non può la retta AB segar SN e PV, se non sega anche DE.

CAPITOLO TERZO.

In cui si considerano i Triangoli e le Figure di più lati per rapporto a' loro lati, ed a' loro angoli.

89. DIFFINIZIONI. Qualunque spazio piano chiuso e compreso da una, o più linee dicesi *Figura*: Se le linee, che chiudono lo spazio, son rette, la figura chiamasi *rettilinea*: se curve, la figura s'appella *curvilinea*; e se l'une son rette, e l'altre curve, la figura dicesi *mistilinea*. Ora noi non parleremo che delle sole rettilinee.

90. La più semplice delle figure rettilinee è quella, che comprendesi da tre linee rette, e che chiamasi *trilatera figura*, ovvero *Triangolo*; essendo evidente, che per chiudere uno spazio son necessarie almeno tre rette linee.

91. Il triangolo considerato per rapporto a'suoi lati è *Equilatero*, se ha i suoi tre lati uguali; è *Isoscele*, o *Equicrure*, se non ne

ne ha che due d'uguali; ed è *Scaleno*, se ha tutti tre i lati disuguali. Considerato poscia lo stesso triangolo per rapporto a'suoi angoli, se l'uno degli angoli è retto, si dirà *Triangolo Rettangolo*; se l'uno è ottuso, chiamerassi *Ambligonio*, od *Ottusiangolo*; e se tutti sono acuti, dirassi *Ossigonio*, od *Acuziangolo*.

92. La *base* di un triangolo si è'l lato, su cui si concepisce, ch'ei posi, ed egli è indifferente prendere per base l'uno, o l'altro de' suoi lati: ma nel triangolo rettangolo prendesi ordinariamente per base il lato opposto all'angolo retto, e detta base appellasi *Ipotenusa*; nel triangolo poi isoscele pigliasi per base il lato disuguale agli altri.

93. L'altezza d'un triangolo ABC (*Fig.* 49. 50.) è la perpendicolare BD abbassata sulla base AC dall' angolo opposto B, ch'appellasi allora la *cima*, o'l *vertice* del triangolo; e nulla serve che la stessa cada sopra la base infra'l triangolo (*Fig.* 49.), ovvero sopra la base prolungata di fuori (*Fig.* 50.); intendendosi per *altezza* la distanza dal vertice alla base, la quale dee esser misurata dalla più corta strada, cioè dalla perpendicolare.

94. Quando prolungasi l'uno de' lati AC (*Fig.* 50.) d' un triangolo, l'angolo BCD, fatto dal suo prolungamento CD col lato vicino BC, s'appella *Angolo esterno*; e i tre angoli del triangolo diconsi *Angoli interni*.

95. PROPOSIZIONE XVI. *In ogni triangolo* ABC (Fig. 49.) *due lati qualunque presi insieme sono maggiori del terzo*.

Il lato AB è retto fra i suoi termini A, B; egli è dunque più corto degli altri due BC, AC, i quali presi insieme vanno a terminare alle medesime estremità; e così degli altri.

96. PROBLEMA. *Date tre linee rette costruire un triangolo.*

Se le tre date linee non sono tali, che prendendole due a due sieno sempre maggiori della terza, il Problema è impossibile, essendo questa una delle condizioni necessarie in qualsivoglia triangolo (*N.* 95.) : ma se questa condizione è soddisfatta, prendo per base una delle date rette AC (*Fig.* 51.); dall' estremità A presa per centro, e con un'apertura di compasso uguale alla seconda delle date linee io descrivo un' arco PQ; dall' altra estremità C presa per centro descrivo un' altro arco RS dalla stessa banda dell' arco PQ; e siccome li due raggi presi insieme sono maggiori della base AC, i due archi PQ, RS si segano in un sol punto B fuori della linea AC (*N.* 59.) : perciò, dal punto B tirando le rette BA, BC, il triangolo ABC sarà'l triangolo ricercato; poichè il

il raggio BA dell' arco PQ equivale alla seconda delle date linee ; il raggio BC dell' arco RS equivale alla terza, e la base AC alla prima.

97. PROPOSIZIONE XVII. *In qualunque triangolo* (Fig. 52.) *l' angolo esterno* BCD *è uguale ai due interni opposti* CBA, BAC *presi insieme ; e tutti tre gli angoli del triangolo sono eguali a due retti.*

Dall' angolo B opposto al lato prolungato AC io tiro MN parallela allo stesso lato AC; l' angolo BCD è dunque uguale al suo alterno MBC (*N.* 70.) : ora, l' angolo MBC è uguale ai due MBA', ABC, e l' angolo MBA al suo alterno BAC ; onde l' angolo esterno BCD, uguale all' angolo MBC, equivale ai due interni opposti BAC, ABC; ciò che doveasi 1°. dimostrare.

L' angolo BCA è uguale al suo alterno CBN, e l' angolo BAC al suo alterno MBA ; e però i tre angoli MBA, ABC, CBN presi insieme sono eguali ai tre angoli del triangolo ; descrivendo dunque dal comun vertice B preso per centro con qualsivoglia raggio una circonferenza di circolo, i tre archi MB, RS, SN contenuti fra detti angoli, e che sono la lor misura, compongono insieme una semicirconferenza MRSN, mercè che la retta MN, la quale passa per lo centro, è un diametro : così li tre angoli presi insieme varranno la semicirconferenza, o due angoli retti ; ed in conseguenza tutti tre gli angoli d' un triangolo sono eguali a due retti; il che doveasi 2°. dimostrare.

98. COROLLARJ. Dunque, 1°. *due angoli d' un triangolo sono sempre minori di due retti ;* imperocchè tutti tre gli angoli di un triangolo sono uguali a due soli retti.

2°. *Se in un triangolo l' uno degli angoli è retto, ovvero ottuso, gli altri due saranno acuti*; imperocchè, se ve ne fosse alcun' altro di retto, o d' ottuso, tutt' i tre angoli presi insieme varrebbero più di due retti.

3°. *Se in un triangolo sieno due angoli uguali a due angoli di un' altro triangolo, ovvero la somma di due angoli d' un triangolo uguale alla somma di due angoli d' un' altro, anche l' angolo rimanente dell' uno sarà uguale all' angolo rimanente dell' altro :* imperocchè altrimenti la somma totale dei tre angoli dell' uno de' triangoli non sarebbe uguale alla somma dei tre angoli dell' altro ; e però l' una, o l' altra di dette somme varrebbe più, o meno di due retti.

99. DIFFINIZIONE. Io dirò, che due triangoli sono *perfettamente uguali*, quando sovrapponendo l' uno all' altro i lati dell' uno

uno cadono ſopra i lati dell'altro, e gli angoli ſopra gli angoli: aggiugno 'l termine di *perfettamente* a quello d' *uguali*, eſſendovi degli angoli, i quali, ſenza poterſi adattare gli uni ſopra gli altri, ſono tuttavolta eguali; cioè, gli ſpazj dalle loro linee rinchiuſi ſono fra loro uguali, come vedremo in ſeguito.

100. PROPOSIZIONE XVIII. *Puoſſi ſempre inferire, che due triangoli* ABC, abc *ſono perfettamente uguali, quando ſi ſappia, ch' i tre lati dell' uno ſono uguali ciaſcheduno a ciaſcheduno ai tre lati dell' altro; o che due lati* AB, BC *ſono uguali ciaſcheduno a ciaſcheduno a' due lati* ab, bc, *e l'angolo contenuto* ABC *uguale all' angolo contenuto* abc; *o finalmente, ſe l' uno de' lati* AG *equivale all' uno de' lati* ac, *e gli angoli formati all' eſtremità* A, G *agli angoli formati all' eſtremità* a, c.

Se i tre lati ſono uguali, preſe per centro l' eſtremità A, C della baſe AC, con raggi uguali agli altri due lati AB, BC io deſcrivo delle ſemicirconferenze RBH, SBM dalla ſteſſa banda della baſe AC prolungata d'ambe le parti; e lo ſteſſo faccio riguardo all' altro angolo *abc*: così, ſovrapponendo la baſe AC alla ſua eguale *ac*, i centri A, C delle ſemicirconferenze RBH, SBM caderanno ſopra i centri *a*, *c* delle ſemicirconferenze *rbb*, *sbm*, ed i raggi AR, CS ſopra i raggi *ar*, *cs*, che lor ſono uguali; le ſemicirconferenze RBH, SBM caderan dunque ſulle ſemicirconferenze *rbb*, *sbm*, e 'l punto B, in cui ſi ſegano le due prime, ſul punto B, in cui ſi ſegan le due ultime. Le rette BA, BC caderan dunque ſopra le rette *ba*, *bc*; e però i due triangoli ABC, *abc* s' adatteranno, e ſaran perfettamente uguali. Il che doveaſi 1°. dimoſtrare.

Se i lati AB, BC ſono uguali ciaſcheduno a ciaſcheduno a' lati *ab*, *bc*, e l'angolo contenuto ABC uguale all' angolo contenuto *abc*, ſovrappongo l'angolo ABC al ſuo eguale *abc*; e però i lati AB, BC caderanno ſopra i loro eguali *ab*, *bc*, e la retta AC ſopra la retta *ac*; e i due triangoli ſaran perfettamente eguali. Il che doveaſi 2°. dimoſtrare.

Se la baſe AC è uguale alla baſe *ac*, e gli angoli formati in A e C, uguali ciaſcuno a ciaſcuno agli angoli formati in *a*, e *c*; ſovrappongo BC al ſuo uguale AC, e gli angoli A e C caderanno ſopra i loro uguali *a*, e *c*; e però le rette AB, BC caderan ſulle rette *ab*, *bc*, e 'l punto B, in cui ſi ſegan le due prime, ſul punto B, in cui ſi ſegano l' altre due: così li due triangoli s' adatteranno, e ſaran perfettamente uguali.

101. CO-

101. COROLLARIO. *Non puossi conchiudere, che due triangoli sieno perfettamente uguali, quantunque si sappia, ch'i tre angoli sono uguali ciascuno a ciascuno ai tre angoli; o che un lato ed un' angolo sieno uguali ad un lato, e ad un angolo; o che un lato, e due angoli sieno uguali ad un lato, e a due angoli; quando i due angoli dall' una e dall' altra parte non sieno fatti all' estremità de' lati uguali.*

Sia 'l triangolo ABC (*Fig.* 54.) ; taglio l' uno de' lati AB in un punto D, e da detto punto tiro una retta DE parallela all' uno de' lati AC, e che seghi l' altro lato BC in un punto E; così 'l lato AB, segando le due parallele AC, DE, fa gli angoli BAC, BDE dalla stessa parte uguali (*N.* 71.) : così pure il lato BC, segando le due parallele AC, DE, fa gli angoli BCA, BED dalla stessa parte uguali. Ora, l'angolo B è comune ai due triangoli ABC, DBE; essi han dunque i tre angoli uguali ciascuno a ciascuno: ma chiaro apparisce, che detti due triangoli non sono uguali; onde dalla sola uguaglianza de' loro angoli non si può conchiudere l' uguaglianza de' triangoli. Ciò che doveasi 1°. dimostrare.

Sia 'l triangolo ABC (*Fig.* 55.) ; dall' estremità C dell' uno de' lati tiro sopra tutt' i punti del lato opposto AB, prolungato ancora, le rette CP, CM, e così io ho li triangoli APC, ABC, AMC, i quali son tutti disuguali, essendo gli uni parte degli altri; e pure questi triangoli hanno lo stesso lato AC, ed un' angolo A comune; dall' egualità di un lato e d' un' angolo retto non si può dunque conchiudere l' egualità di due triangoli. Il che doveasi 2°. dimostrare.

Sia finalmente 'l triangolo ABC (*Fig.* 56.), il cui angolo B io suppongo non essere uguale all' angolo C: si faccia in C un' angolo uguale all' angolo B, e 'l lato CM di detto angolo caderà sopra AB prolungato in M, se l' angolo B è maggiore dell' angolo ACB; ed all' opposto il lato CP dell' angolo fatto in C caderà sopra AB infra A e B, se l' angolo B è minore dell' angolo ACB. Ora, in entramb' i casi, il triangolo ABC non sarà uguale nè al triangolo ACM, nè al triangolo ACP, quantunque gli uni e gli altri di detti triangoli abbiano un lato AC comune, e due angoli eguali; onde dall' egualità d' un lato e di due angoli qualunque non puossi conchiudere l' uguaglianza di due triangoli. Il che doveasi 3°. dimostrare.

102. PROPOSIZIONE XIX. *Due triangoli rettangoli* ACB,

acb

acb (Fig. 57.) *saranno perfettamente uguali fra loro, se l' ipotenusa* AB *e l' uno de' lati* AC *dell' uno sono uguali ciascuno a ciascuno all' ipotenusa* ab, *e al lato* ac *dell' altro; o se i due lati* AC, CB *sono eguali a' lati* ac, cb *dell' altro: ma se l' ipotenusa* AB *e 'l lato* AC *dell' uno* (Fig. 58.) *sono eguali ciascuno a ciascuno a' due lati* cb, ac *dell' altro, i due triangoli non sono perfettamente uguali.*

Se l' ipotenusa AB e 'l lato AC sono uguali ciascuno a ciascuno all' ipotenusa *ab*, e al lato *ac*; sovrappongo il lato AC al suo uguale *ac*, e per essere l' angolo retto ACB uguale all' angolo retto *acb* il lato CB caderà sopra la direzione del lato *cb*, e tutti due saranno eguali; imperocchè, se fosse CB maggiore di *cb*, il punto B caderebbe di là da *b*, per esempio in *e*, e l' ipotenusa AB caderebbe sopra *ae*; e siccome ella sarebbe più distante dalla retta *ac* perpendicolare sopra *ce* che l' ipotenusa *ab*, così sarebbe più lunga di detta ipotenusa (*N.* 53.); il che è contro l' ipotesi. Parimente, se fosse CB più corta di *cb*, il suo punto B caderebbe fra *b* e *c*, e l' ipotenusa AB segherebbe *cb* in un punto più vicino alla perpendicolare che l' ipotenusa *ab*: quindi n' avverrebbe, essere AB minore di *ab* (*N.* 53.), ciò che è altresì contro l' ipotesi, onde CB dee cadere sopra *cb*, e i due triangoli esser debbono perfettamente uguali. Il che doveasi 1°. dimostrare.

Se i due lati AC, CB sono uguali ciascuno a ciascuno a' due lati *ac*, *cb*, i due triangoli saranno perfettamente eguali, per essere l' angolo retto compreso B uguale all' angolo retto compreso *b* (*N.* 100.). Il che si dovea 2°. dimostrare.

Se l' Ipotenusa AB (*Fig.* 58.) e 'l lato AC sono eguali ciascuno a ciascuno a' lati *cb*, *ac*; perpendicolare essendo il lato CB sopra AC, egli è più corto dell' ipotenusa AB (*N.* 59.): così, nell' altro triangolo *abc*, il lato *cb* uguale ad AB è maggiore del lato CB del primo triangolo; e siccome, essendo *cb* perpendicolare ad *ac*, egli è minore dell' obbliqua *ab*, ne segue, che l' ipotenusa *ab* del secondo triangolo è maggiore del lato AC del primo; onde, non avendo questi due triangoli i lati uguali ciascuno a ciascuno, non sono perfettamente uguali. Il che si dovea 3°. dimostrare.

103. PROPOSIZIONE XX. *In ogni triangolo isoscele, li due angoli sopra la base, cioè sopra 'l lato disuguale, sono eguali: in ogni triangolo equilatero, i tre angoli sono eguali: in ogni triangolo scaleno, li tre angoli sono disuguali; e 'l maggiore è quello, ch' è opposto al lato maggiore, e 'l minore quello, ch' è opposto al minore.*

Se'l triangolo ABC (*Fig. 59.*) è isoscele, e che AC sia'l lato disuguale, i due lati uguali AB, BC sono due oblique eguali tirate dal punto A sopra la retta AC (*N.* 54.); queste due oblique son dunque egualmente inclinate sopra AC (*N.* 84.), e però gli angoli BAC, BCA sopra la base sono uguali. Il che doveasi 1°. dimostrare.

Se'l triangolo ABC (*Fig.60.*) è equilatero, io lo considero come isoscele sopra l'uno de' suoi lati AC, e per conseguenza gli angoli A, C sono uguali; lo considero ancora come isoscele sopra 'l lato AB, e però gli angoli A, B sono uguali: dunque i tre angoli A, C, B sono eguali. Il che doveasi 2°. dimostrare.

Se'l triangolo ABC è scaleno (*Fig. 61.*), e che AC sia 'l lato maggiore, ed AB il minore; prolungo il lato medio in E, finchè CE sia uguale ad AC, e tiro la linea EA. Il triangolo ACE è dunque isoscele, e gli angoli CEA, CAE sono uguali. Ora, essendo l'angolo ABC esterno al triangolo AEB uguale a' due interni opposti AEB, EAB (*N. 97.*), egli è maggiore del solo AEB, o CEA; ond'ei è anche maggiore dell' angolo CAE, e molto più dell'angolo CAB, il qual'altro non è ch' una parte dell'angolo CAE. Così, nel triangolo scaleno ABC, l'angolo ABC opposto al lato maggiore AB è maggior dell' angolo CAB opposto al lato medio CB.

Prolungo il lato minore BA in M, finattanto che sia BM uguale al lato medio BC, e tiro la retta MC; il triangolo MBC è dunque isoscele, e l'angolo BMC è uguale all'angolo BCM: ora, essendo l'angolo BAC esterno al triangolo AMC uguale ai due interni opposti BMC, ACM (*N. 97.*), è maggiore del solo AMC, o BMC; ond'egli è maggiore ancora dell'angolo BCM, e molto più dell' angolo BCA, il quale non è ch' una parte dell' angolo BCM; così, nel triangolo BAC scaleno, l'angolo BAC opposto al lato medio BC è maggior dell' angolo BCA opposto al lato minore: ma s' è già veduto, che l' angolo ABC opposto al lato maggiore AC è maggior dell'angolo BAC opposto al medio; molto più dunque l' angolo ABC è maggior dell' angolo BCA opposto al minore; dunque ec. Il che doveasi 3°. dimostrare.

104. COROLLARIO I°. *In ogni triangolo generalmente, gli angoli maggiori sono opposti a' lati maggiori.*

Ciò s' è dimostrato riguardo al triangolo scaleno; s' è veduto parimente, che nel triangolo equilatero tutti gli angoli sono uguali, per essere uguali i lati, a cui sono opposti; e che nel trian-

triangolo isoscele gli angoli opposti a' lati uguali sono uguali: ci resta dunque solo a far vedere, che nel triangolo isoscele l'angolo opposto alla base è maggiore di ciascheduno de' due uguali, se la base è maggior di ciascheduno de' lati uguali, e minore, se la base è minore. Ciò ch'io così dimostro.

Se la base AC (*Fig. 62.*) del triangolo isoscele ABC è minore di ciascheduno de' lati uguali AB, BC, prolungo detta base in D, finchè sia AD eguale ad AB, e tiro la retta BD; così'l triangolo BAD è isoscele, e gli angoli ABD, ADB sono uguali: ora, essendo l'angolo ACB esterno al triangolo CBD uguale a' due interni opposti CDB e CBD (*N. 97.*), egli è maggiore di CDB, o di ADB; dunque l'angolo ACB è altresì maggiore dell'angolo ABD, e molto più dell'angolo ABC, il quale non è ch'una parte di ABD: così, nel triangolo isoscele ABC, l'angolo ACB opposto al lato AB, maggiore della base AC, è maggiore dell'angolo ABC opposto a detta base.

Se la base AC (*Fig. 63.*) è maggiore di ciascheduno de' due lati uguali AB, BC, prolungo l'uno de' lati AD, finattanto che sia AD uguale ad AC: così, nel triangolo isoscele DAC, io ho l'angolo ADC uguale all'angolo ACD; e siccome l'angolo ABC, esterno al triangolo CBD, è maggiore del solo interno CDB, poichè egli è uguale a' due interni opposti (*N. 97.*), questo stesso angolo ABC è altresì maggiore dell'angolo ACD uguale a CDB, o ADC, e molto più dell'angolo ACB, il quale non è ch' una parte dell'angolo ACD. Così, nel triangolo isoscele ABC, l'angolo ABC opposto alla base AC, maggiore di ciascheduno de' lati uguali AB, BC, è maggiore dell'angolo ACB opposto al lato AB. Dunque, ec. Il che doveasi dimostrare.

105. COROLLARIO II. ***In ogni triangolo, i lati maggiori sono opposti agli angoli maggiori.***

Nel triangolo scaleno ABC (*Fig. 61.*), B è l'angolo maggiore, A il medio, e C il minore. Se'l lato BC opposto all'angolo medio fosse uguale al lato AC opposto al maggiore, il triangolo sarebbe isoscele, e gli angoli A e B sarebbero uguali (*N.* 103.); il che è contro l'ipotesi: e se BC fosse maggiore di AC, l'angolo A opposto a BC sarebbe maggiore dell'angolo B opposto ad AC (*N.* 104.); il che è ancora contro l'ipotesi.

Dunque necessariamente conviene, che BC sia minore di CA. Così pure, se'l lato AB opposto all'angolo minore C fosse uguale al lato BC opposto all'angolo medio A, il triangolo sarebbe iso-

fcele, e gli angoli A, C farebbero uguali (*N.* 103.); il che è ancora contro l'ipotesi: e se AB fosse maggiore di BC, l'angolo C opposto ad AB farebbe maggiore dell'angolo A opposto a BC (*N.* 104.), il che è ancora contro l'ipotesi; perciò AB esser dee minore di BC. Dunque, ec.

106. COROLLARIO III. *Dunque l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è maggiore di ciascheduno degli altri due lati.*

Perocchè ella è opposta all'angolo maggiore; e per la stessa ragione, in qualunque triangolo ottusiangolo, il lato opposto all'angolo ottuso è'l maggiore.

107. PROPOSIZIONE XXI. *In ogni triangolo isoscele, la perpendicolare tirata sopra la base dal vertice dell'angolo opposto divide essa base in due parti uguali; in ogni triangolo equilatero, le perpendicolari tirate da' vertici degli angoli sopra i lati opposti dividono ciascheduno di essi lati per mezzo; ed in ogni triangolo scaleno, le perpendicolari tirate dagli angoli sopra i lati opposti dividono ciascuno di detti lati in due parti disuguali.*

Se'l triangolo ABC (*Fig.* 59.) è isoscele, e ch' il lato AC sia la base, i due lati BA, BC sono due obblique uguali tirate sopra AC dal punto esterior B; onde la perpendicolare tirata dal medesimo punto sopra AC segar dee AC in un punto equidistante da' punti A, C (*N.* 54.), e per conseguenza AC esser dee segata in due parti eguali. Il che si dovea 1°. dimostrare.

Se'l triangolo ABC (*Fig.* 60.) è equilatero, io lo considero come isoscele sopra 'l lato AC, e in conseguenza la perpendicolare tirata dall' angolo opposto B sopra AC segherà AC per mezzo. Per la stessa ragione, se lo considero come isoscele sopra'l lato AB, il lato sarà segato per mezzo dalla perpendicolare tirata dall' angolo opposto C, e dall' altro lato BC. Il che si dovea 2°. dimostrare.

Finalmente, se'l triangolo ABC (*Fig.* 61.) è scaleno, i due lati BA, BC saranno due obblique disuguali tirate sopra AC da un punto esterior B; onde la perpendicolare tirata dal medesimo punto B sopra AC non segherà AC in un punto equidistante da' termini A, C dell' obblique; imperocchè altrimenti elle sarebbero uguali (*N.*54.); dunque AC sarà segato in due parti disuguali, e lo stesso dicasi degli altri lati. Il che si dovea 3°. dimomostrare.

108. PROPOSIZIONE XXII. *Se due triangoli* ABC, abc (Fig. 64.) *hanno i lati* AB, BC *uguali ciascuno a ciascuno a'* lati

lati ab, bc, *ma che l'angolo* B *contenuto da' due primi sia minore dell'angolo* b *contenuto dagli altri due, la base* AC *del primo è minore della base* ac *del secondo; e se l'angolo* B *è maggiore dell' angolo* b, *la base* AC *sarà maggiore della base* ac.

Faccio in B col lato AB un'angolo ABD uguale all'angolo *b*, e faccio'l lato BD uguale al lato *bc* del secondo triangolo *abc*. Tiro le rette AD, DC; ed i triangoli ABD, *abc* sono perfettamente uguali, per essere i lati AB, BD uguali ciascuno a ciascuno ai lati *ab*, *bc*, e per essere l'angolo ABD eguale all' angolo *abc* (*N.* 100.); la base AD è dunque uguale alla base *ac*. Ora, il triangolo CBD è isoscele, per essere il lato BD uguale a *bc*, ch' è uguale a BC; però l'angolo BDC è uguale all'angolo BCD (*N.* 103.): ma l'angolo DCA è maggiore dell' angolo BCD, il quale non è ch'una delle sue parti; onde l' angolo DCA è ancora maggiore dell'angolo BDC, e molto più dell' angolo ADC, il quale non è ch'una parte di BDC. Così, nel triangolo ADC, essendo l'angolo ACD maggior dell'angolo CDA, il lato AD opposto all' angolo ACD è maggiore del lato AC opposto all' angolo ADC (*N.* 104.); e però la base AC del primo triangolo è minor della base AD, o *ac* del secondo.

Che se l'angolo B fosse maggiore di *b*, proverebbesi, come sopra, esser la base *ac*, opposta all' angolo minore, minor dell'altra base AC, e ch' in conseguenza la base del maggiore è maggior della base del minore.

109. COROLLARIO. *Se due triangoli* ABC, abc (Fig. 64.) *hanno i lati* AB, BC *uguali ciascuno a ciascuno a'lati* ab, bc, *ma che la base* AC *sia minore della base* ac *del secondo, l' angolo* B *opposto alla base minore è minor dell' angolo* b *opposto alla maggiore; e se la base* AC *è maggiore di* ac, *l' angolo* B *è maggior dell'angolo* b.

Se l'angolo B fosse uguale all'angolo *b*, i due triangoli sarebbero perfettamente uguali, e la base AC sarebbe uguale alla base *ac* (*N.* 100.); il che è contro la suppofizione: e se l'angolo B fosse maggior dell' angolo *b*, la base AC sarebbe maggiore della base *ac* (*N.* 108.); il che è parimente contro l'ipotesi: necessariamente dunque conviene, che l'angolo B sia minor di *b*; e si proverà ancora, che l'angolo B esser dee minore di *b*, se AC è maggior di *ac*.

110. PROBLEMA. *All' estremità* B *d' una retta* AB (Fig. 71.) *alzare una perpendicolare.*

Se

Se la retta AB potesse prolungarsi di là da B in H, sopra AH s' alzerebbe in B la perpendicolare, come abbiamo insegnato sopra n°. *62*.

Ma se la retta AB non può prolungarsi a cagione di qualche ostacolo, che vi s' opponga, piglio sopra AB una parte da B in C ad arbitrio. Da' punti C e B presi per centro, e con un'apertura di compasso maggiore della metà di CB descrivo due archi dallo stesso lato, che si segano in un punto D fuori della linea CB, per essere i due raggi presi insieme maggiori di CB (*N.59.*); tiro le rette DC, DB; prolungo CD, facendo DE uguale a CD, e dal punto E pel punto B tiro la retta EB, ch'è la perpendicolare cercata.

Isosceli essendo per la costruzione i triangoli CDB, BDE, i due angoli DCB, DBC sono fra loro uguali (*N.* 103.), non meno ch' i due angoli DBE, DEB. Ora, i quattro angoli DCB, DBC, DBE, DEB vagliono insieme i tre angoli del triangolo CBE, cioè due retti (*N. 97.*); onde la metà di questi quattro angoli, cioè gli angoli DAC, DBE presi insieme sono eguali ad un retto: ma questi due angoli pres' insieme compongono l'angolo CBE; quest' angolo è dunque retto, e però B è perpendicolare sopra AB (*N.* 51.).

Delle Figure, che hanno più di tre lati.

111. Qualsivoglia figura di quattro lati dicesi *Quadrilatera*.

Se i quattro lati sono fra loro uguali, e che tutti gli angoli sien retti, il quadrilatero appellasi *Quadrato*. Quindi ne segue, ch'i lati opposti d' un quadrato (*Fig. 65.*) sono fra loro paralleli; imperocchè, perpendicolari essendo i lati AB, DC del quadro ABCD sul lato AD a cagione degli angoli retti A, D, sono tra loro parallelli (*N. 68.*); e perpendicolari essendo altresì i lati opposti AD, BC sopra 'l lato CD a motivo degli angoli retti D, C, sono paralleli.

113. Il *Rettangolo* è quella figura, o quadrilatero, che oltre all'avere i lati opposti paralleli, ha ancora tutti i quattro angoli retti, ed uguali. I lati opposti di questa figura sono uguali; imperocchè, essendo i lati opposti AB, DC del rettangolo ABCD (*Fig. 66.*) paralleli fra i lati opposti AD, BC, che son pure paralleli a cagione degli angoli retti, esser debbono uguali (*N.77.*); e per la stessa ragione deggiono essere uguali i due lati opposti AD, BC.

114. Se

114. Se retti non sono nè i quattro angoli, nè i quattro lati, ma che paralleli sieno i lati opposti, il quadrilatero chiamasi *parallelogrammo* (*Fig.* 67.); ed allora i lati opposti di questa figura sono uguali per la ragione accennata parlando del rettangolo (*N.* 113.).

115. Il *Rombo* è un quadrilatero (*Fig.* 68.), che ha bene i lati, ma non gli angoli uguali; ed in questa figura i lati opposti sono paralleli, poichè, da due angoli opposti B, D tirando la retta BD, il Rombo è diviso in due triangoli BAD, BCD i quali, per avere i tre lati uguali ciascuno a ciascuno, sono perfettamente uguali (*N.* 100.); e per essere isosceli, hanno gli angoli sopra la base BD uguali (*N.* 73.): così, uguale essendo ADB al suo alterno CBD, i lati AD, BC del Rombo sono paralleli (*N.* 73.); così pure, ugual'essendo l'angolo ABD al suo alterno CDB, i lati AB, CD sono altresì paralleli.

116. Il *Trapezio* (*Fig.* 69.) è un quadrilatero, i cui quattro angoli non sono tutti uguali, ed i cui lati opposti non sono paralleli; e'l *Trapezoide* (*Fig.* 70.) è un quadrilatero, i cui quattro angoli non sono tutti uguali, e di cui soltanto due lati son paralleli.

117. In qualsivoglia quadrilatero (*Fig.* 65. 66. 67. 68. 69. 70.), *Diagonale* s'appella la retta BD, che da un'angolo B tirasi al suo opposto D.

Generalmente le figure che hanno più di quattro lati chiamansi *Poligoni*: questi poligoni pigliano il lor nome dal numero de' loro lati, come *Pentagono* dicesi quello di cinque, *Esagono* di sei, *Eptagono* di sette, *Ottagono* di otto, *Enneagono* di nove, *Decagono* di dieci, *Ondecagono* di undeci, *Duodecagono* di dodici. Gli altri si dicono Poligoni di 13. 14. 15. lati ec.

Se i poligoni hanno tutti gli angoli, ed i lati uguali, diconsi *regolari*; altrimenti s'appellano *irregolari*.

118. PROPOSIZIONE XXIII. *Ogni quadrilatero* (*Fig.* 65. 66. 67. 68.), *del trapezio e trapezoide in fuori, è segato per mezzo dall'una, o dall'altra delle loro diagonali* AC, BD; *e le due diagonali si segano in due parti uguali*.

Per la formazione del quadrato, del rettangolo, del parallelogrammo, e del rombo, i lati opposti sono paralleli, ed uguali; se dunque tirasi la diagonale BD, i triangoli BCD, BAD ch'essa forma coi lati sono perfettamente uguali; poichè il lato BC è uguale al suo opposto AD, il lato CD al suo opposto AB, e'l terzo lato BD è comune all'uno, e all'altro triangolo (*N.* 100.): ora,

ora, questi due triangoli compongono l'intera figura. Dunque la figura è tagliata in due parti eguali dalla diagonale. Il che doveasi 1°. dimostrare.

Tirate le due diagonali BD, AC, i triangoli BOC, AOD opposti al vertice O hanno 'l lato BC uguale al lato AD opposto a BC, l'angolo OBC uguale al suo alterno ODA, e l'angolo OCB uguale al suo alterno OAD: così, avendo questi due triangoli un lato uguale ad un lato, e gli angoli corrispondenti a questi lati uguali ciascuno a ciascuno, sono perfettamente uguali (*N.* 100.); onde il lato BO del primo triangolo opposto all'angolo OCB è uguale al lato OD opposto all'angolo OAD uguale all'angolo OCB; e però la diagonale BD è divisa in due egualmente in O: così pure, il lato OC del primo triangolo opposto all'angolo OBC è uguale al lato OA del secondo triangolo opposto all'angolo ODA uguale all'angolo OBC; e però la diagonale AC è parimente divisa per mezzo in O; il che doveasi 3°. dimostrare.

119. PROPOSIZIONE XXIV. *Qualsivoglia poligono regolare, od irregolare, comprendendovi 'l triangolo e 'l quadrilatero, si può dividere in tanti triangoli, quanti sono i lati; o in tanti triangoli meno uno, quanti sono i lati; ovvero in tanti triangoli meno due, quanti sono i lati: ma quest'ultimo caso non è comune al triangolo.*

Sia 'l pentagono irregolare ABCDE (*Fig.* 72.). Nello spazio rinchiuso da' suoi lati prendo un punto O, e da detto punto tiro agli angoli le rette OA, OB, OC, OD, OE; e 'l pentagono è diviso in tanti triangoli, quanti sono i lati, il ch'è evidente; e lo stesso dicasi degli altri poligoni regolari, od irregolari.

Sia 'l medesimo pentagono ABCDE (*Fig.* 73.). Sopra l'uno de' suoi lati BC piglio un punto R, il quale non sia nè l'uno, nè l'altro de' termini B, C. Tiro da detto punto delle rette RA, RE, RD a tutti gli angoli, a cui se ne posson tirare; ciò che divide 'l pentagono in triangoli. Ora, il primo triangolo RBA assorbe il lato AB del pentagono, e la parte BR del lato BC; e l'ultimo triangolo RCD assorbe il lato CD del pentagono, e la parte RC del lato di BC: così necessarj sono tre lati del pentagono per i due triangoli RBA, RCD; e all'opposto non occorre che un lato del pentagono per ciascuno degli altri triangoli RAE, RED. Perciò, siccome il pentagono ha soli cinque lati, così aver non dee che quattro angoli [illegible], cioè 5—1, o tanti, quanti sono i lati meno uno; e così degli altri.

Sia ancora lo stesso pentagono ABCDE (*Fig.* 74.); dall'uno de'

de' suoi angoli B tiro delle rette BE, BD agli altri angoli, a cui ne posso tirare, ciò che divide 'l pentagono in triangoli: ora, i due triangoli estremi BAE, BCD assorbono ciascuno due lati del pentagono; ed in conseguenza tanti esser debbono i triangoli meno due, quanti sono i lati; ed è manifesto, che 'l triangolo, o 'l poligono di tre lati è l'unico, che non può esser diviso in questo terzo modo.

120. PROPOSIZIONE XXV. *Qualsivoglia poligono regolare* ABCDEF (Fig. 75.) *si può dividere in tanti triangoli isosceli, e perfettamente uguali, quanti sono i lati; e tutt'i vertici di questi triangoli saranno in un medesimo punto equidistanti da tutti gli angoli del poligono.*

Dividansi tutti gli angoli in due parti eguali colle rette AO, BO, CO, DO, ec. così, uguali essendo tutti gli angoli del poligono, poichè egli è regolare, tutti gli angoli OAB, OAF, ec. formati dalle linee AO, BO, ec. coi lati del poligono, sono parimente uguali. Ora, ciascun' angolo BAF, ec. del poligono vale meno di due retti, poichè detto angolo e 'l suo conseguente RAF non vagliono che due retti (*N.* 49.); onde ciascuno degli angoli OAB, ec. formati dalle rette AO, OB, ec. coi lati del poligono, è minore d'un retto: ma se 'l lato AB tagliasse le due rette AO, BO in modo, che gli angoli interni dalla stessa banda OAB, OBA fossero insieme uguali a due retti, le linee AO, BO sarebbero parallele (*N.* 73.); poichè dunque detti due angoli OAB, OBA vagliono insieme meno di due retti, le due linee AO, BO debbono avvicinarsi, e per conseguenza segarsi in un punto O; e 'l triangolo AOB esser dee isoscele per essere gli angoli sopra la base AB uguali. Nel modo stesso si proverà, che le linee BO, CO debbono segarsi, e formare un triangolo isoscele BOC per essere gli angoli sopra la base BC uguali. Ora, avendo i triangoli isosceli AOB, BOC la base AB uguale alla base BC, e i due angoli sopra la base AB uguali ciascuno a ciascuno ai due angoli sopra la base BC, sono perfettamente uguali (*N.* 100.); debbono adunque i due lati uguali AO, BO del primo essere uguali a' lati eguali BO, CO del secondo, e in conseguenza il lato BO esser dee comune ai due triangoli, e 'l punto O esser dee il loro comun vertice. In somigliante guisa si dimostrerà, che gli altri triangoli COD, ec. sono isosceli, e perfettamente uguali ai due, di cui abbiam parlato, e ch' il vertice O dee essere a tutti comune; e quindi ne segue, ch' uguali essendo tutti i lati AO, BO, ec. di essi triango-

li, il punto O è equidistante da tutti gli angoli del poligono.

121. COROLLARIO. *Se dunque, preso il punto O per centro, con un raggio uguale all'una delle rette AO descrivesi una circonferenza, ella passerà per l'estremità B, C, D, ec. dell'altre linee BO, CO, ec. ed in conseguenza per tutti gli angoli del poligono.*

122. PROPOSIZIONE XXVI. *Se dopo diviso un poligono regolare ABCDEF (Fig. 75.) in tanti triangoli isosceli, e perfettamente uguali, quanti sono i lati, dal vertice O comune a tutt'i triangoli si tirino delle perpendicolari OS, OT sopra i lati; dette perpendicolari saranno uguali.*

I triangoli AOF, FOE sono isosceli, e però le perpendicolari tirate da' vertici sopra le basi dividono ciascuna base AF, FE per mezzo in S, e T (*N.* 107.). Ora, queste due basi sono uguali; dunque uguali sono ancora le loro metà SF, FT: così, avendo i triangoli OFS, OFT l'angolo OFS uguale all'angolo OFT, ed i lati OF, FS, che comprendono l'angolo OFS, uguali ciascuno a ciascuno a' lati OF, FT, che comprendono l'angolo OFT, son perfettamente uguali (*N.* 100.); la perpendicolare OS è dunque uguale alla perpendicolare OT; e così dell'altre

123. DIFFINIZIONE. Se un poligono (*Fig.* 75.) è diviso in tanti triangoli isosceli, e perfettamente uguali, quanti sono i lati, il punto O, ch'è il vertice comune de' triangoli, appellasi *centro del poligono*; gli angoli ABC, ec. formati da' lati del poligono, diconsi *angoli della figura*, gli angoli OAB, OBA dell'uno de' triangoli sopra un lato AB si dicono *angoli sopra la base*; i lati OA, OB, ec. de' triangoli si chiamano *raggi*, e le perpendicolari OS, OT, ec. diconsi *Apotemi, Cateti, o Raggi retti*.

124. PROPOSIZIONE XXVII. *Tutti gli angoli d' un poligono regolare vagliono due volte tanti retti meno quattro, quanti sono i lati del poligono.*

Ogni poligono regolare può dividersi in tanti triangoli isosceli, ed uguali, quanti sono i lati: ora, i tre angoli di ciascuno di questi triangoli vagliono insieme due retti (*N.* 97.); dunque tutti gli angoli de' triangoli presi insieme vagliono due volte tanti retti, quanti sono i lati del poligono: ma debbonsi da questa somma sottrarre gli angoli al vertice O, mercè che gli angoli del poligono comprendono i soli angoli delle basi de' triangoli; e tutti gli angoli al vertice vagliono insieme quattro retti, poichè essi abbraccierebbero l'intera circonferenza, che descritta sarebbe dal centro O; dunque tutti gli angoli del poligono vagliono due volte tanti retti

meno

meno quattro, quanti sono i lati del poligono. P. e. composto essendo l'esagono di sei triangoli, tutti gli angoli di questi triangoli vagliono insieme sei volte due retti, cioè 12 angoli retti; da cui sottraendo i quattro retti, che sono 'l valore delli *6* angoli fatti in O, resteranno otto retti pel valore della somma degli angoli dell' Esagono; e così dicasi degli altri.

125. PROPOSIZIONE XXVIII. *Se prolunganſi tutti i lati d'un poligono* (Fig. 75.) *da una sola parte in* R, X, ec. *tutti gli angoli esterni sono uguali; ciascun di loro è uguale all'angolo al centro; e tutti insieme equivagliono a quattro retti.*

Tutti gli angoli del poligono sono fra loro uguali: ora, ciascuno di detti angoli BAF, ec. e 'l suo conseguente RAF, ec. vagliono insieme due retti (*N.* 49.); però tutti gli angoli esterni sono uguali.

L'angolo BAF e 'l suo conseguente RAF vagliono insieme due retti; e i tre angoli OAF, OFA, AOF del triangolo AOF presi insieme vagliono altresì due retti. Dunque gli angoli BAF, RAF presi insieme equivagliono alla somma dei tre OAF, OFA, AOF: ma l'angolo BAF è uguale alla somma de'due OAF, OFA, poichè tanto OAF quanto OFA vagliono la metà di BAF; dunque l'angolo esterno RAF è uguale all'angolo al centro AOF, e così degli altri.

Tanti sono gli angoli esterni, quanti sono gli angoli al centro, e tutti gli angoli al centro equivagliono a quattro retti; essendo dunque ogni angolo esterno uguale ad ogni angolo al centro, la somma degli esterni è uguale a quattro retti.

126. PROBLEMA. *Dato un poligono* ABCDE (Fig. *76.*) *ritrovare 'l valore dell'angolo al centro, dell'angolo sopra la base, e di quello della figura.*

Supponiamo, ch'il poligono sia un pentagono; facendo centro in O, col raggio OA descrivo un circolo, che passi per tutti gli angoli del poligono (*N.* 122.), e che diviso sia in cinque parti uguali dai cinque angoli uguali del centro: così ognuno di questi angoli vale la quinta parte della circonferenza, o di *360* gradi; e però l'angolo al centro ne vale 72. Ora, i tre angoli del triangolo AOB vagliono insieme due retti (*N.* *97.*), o 180 gradi. Da 180 sottraendo dunque il valore 72 dell'angolo al centro AOB, il residuo 108 è'l valor de'due angoli sopra la base presi insieme, o 'l valore dell'angolo BAE della figura, il qual'è uguale a' due angoli OAB, OBA, poichè egli è'l doppio di ciascheduno d'essi;

Ii 2 onde

onde ciascuno degli angoli OAB, OBA sopra la base vale 54 gradi; e così pure si troveranno gli angoli degli altri poligoni.

127. COROLLARIO I°. *Nell'esagono* (Fig. 75.) *uguali sono gli angoli sopra la base, e l'angolo al centro; e tutt' i triangoli componenti detto esagono sono equilateri.*

L'angolo al centro AOB abbraccia la sesta parte della circonferenza, e vale il sesto di 360 gradi, cioè 60.

Sottraendo dunque il valore 60 dal valore 180 dei tre angoli del triangolo AOB, resterà 120 pel valore de'due angoli sopra la base; ed in conseguenza ognuno d'essi varrà 60 gradi, non altrimenti che l'angolo al centro. Così, uguali essendo i tre angoli del triangolo AOB, lo saranno pure i tre lati; imperocchè, se vi fossero de'lati disuguali, disuguali sarebbero ancora gli angoli opposti ad essi lati (*N.* 104.).

128. COROLLARIO II. *Nel decagono, o poligono di* 10 *lati, l'angolo al centro è la metà dell'angolo sopra la base.*

L'angolo al centro abbraccia la decima parte della circonferenza, o di 360 gradi, e però detto angolo vale 36 gradi; sottraendo dunque il valor 36 dal valore 180 del triangolo, il residuo 144 sarà 'l valore de'due angoli sopra la base; così ciascuno di essi è 72: ora, 36 è la metà di 72; onde l'angolo al centro è la metà dell'angolo sopra la base.

129. PROBLEMA. *Dato il lato* AB *d'un poligono* (Fig. 76.) *costruire detto poligono.*

A ciascuna dell'estremità A, B faccio un'angolo uguale all'angolo sopra la base del poligono ricercato. P. e. se fosse un pentagono, io farei in A un'angolo OAB di 54 gradi (*N.*128.), ed un'altro OBA d'egual numero di gradi in B; dal punto O, in cui i lati OA, OB di quest'angoli si segano, con un'apertura di compasso uguale ad OA, o ad OB descriverei una circonferenza, sopra cui portando ancora quattro volte il lato AB da B in C, da C in D, ec. avrei 'l pentagono cercato.

Poichè il triangolo AOB è isoscele a cagione degli angoli uguali OBA, OAB sopra la base AB; e siccome questi due angoli vagliono insieme 108 gradi, e che 180 se ne ricercano per i tre angoli di questo triangolo (*N.* 97.), necessariamente ne segue, essere l'angolo AOB uguale a 72 gradi, o alla quinta parte della circonferenza. Così, 4 volte ancora sopra la circonferenza portando il lato AB, la circonferenza troverassi divisa nelle sue cinque parti uguali: quindi è, che se da'punti di divisione C, D, ec. tiransi de'raggi al

al centro, si troveranno cinque triangoli uguali al primo AOB, ordinati intorno lo stesso vertice O; e però la figura composta di questi cinque triangoli è un pentagono regolare, il cui lato è AB, quale appunto si cercava.

AVVERTIMENTO. Negli stucci Matematici evvi un semicircolo graduato, cioè diviso ne' suoi 180 gradi, mediante cui agevolmente descrivesi un' angolo di qualsivoglia numero di gradi.

130. PROBLEMA. *Dato l'apotema, o raggio retto* OR (Fig. 76.) *di un poligono costruire detto poligono.*

Supponiamo, ch' il poligono cercato sia un pentagono; sopra l' estremità R dell' apotema OR alzo una perpendicolare indefinita AE; e siccome l' angolo al centro d' un pentagono è di 72 gradi, così all' altra estremità O dell' apotema OR io faccio due angoli AOR, EOR, l'uno dall'una, e l'altro dall'altra parte, amendue di 36 gradi, cioè della metà di 72: così, acuti essendo questi angoli, i loro lati AO, EO sono inclinati sopra OR dalla parte della perpendicolare AE, e debbono in conseguenza segare questa perpendicolare ne' punti A, E; e siccome ne' triangoli ARO, ERO il lato OR è comune, e gli angoli AOR, ARO fatti sopra questo lato sono uguali ciascuno a ciascuno agli angoli ERO, EOR fatti sopra lo stesso lato, ne segue, che questi due angoli sono uguali (*N.* 100.); l'angolo OAR è dunque uguale all'angolo OER, e però il triangolo AOE è isoscele, e l'angolo al vertice è di 72 gradi, o la quinta parte della circonferenza. Così, preso per centro 'l punto O, descrivendo col raggio OA, od OE una circonferenza, e quattro volte ancora sopra questa circonferenza portando la base AE da E in D, da D in C, ec. s' avrà un pentagono regolare, il cui apotema è OR, qual' appunto si cercava; ciò che dimostrasi come nel Problema precedente.

131. PROBLEMA. *Sopra una data retta* AD (Fig. 65.) *costruire un quadrato.*

Ai termini A, D della linea AD alzo due perpendicolari AB, DC, ciascuna delle quali io faccio uguale alla retta AD. De' termini B, C di queste perpendicolari tiro la retta BC, e la figura ABCD sarà 'l quadrato, che si cerca.

Imperocchè, perpendicolare essendo la retta AD sopra le rette AB, DC, queste due linee sono fra loro parallele (*N.* 68.); e, dalla retta AD equidistanti essendo i due punti B, C della retta BC, le due linee BC, AD sono parallele (*N.* 78.), uguali, ed ugualmente inclinate fra le parallele AB, CD (*N.* 77.); ma

AD

AD è perpendicolare fra le due AB, CD; dunque lo è altresì la retta BC, e in conseguenza retti essendo tutti gli angoli della figura, ed uguali tutti i lati, questa figura sarà un quadro (*N.* 112.) formato sopra 'l lato, che si cerca.

132. PROBLEMA. *Dati due lati disuguali* AD, AB (Fig.*66.*) *d'un rettangolo, costruire detto rettangolo.*

Alzo perpendicolarmente AB sopra l'estremità A del lato AD, poi dal punto B tiro una parallela alla retta AD, e dal punto D ne tiro un'altra alla retta AB, che sega l'altra parallela in C; e la figura ABCD è 'l rettangolo cercato.

Imperocchè, parallele essendo le due rette AB, DC fra le parallelle AD, BC, sono uguali, ed ugualmente inclinate (*N.* 77.): ora AB è perpendicolare sopra AD; onde lo è ancora DC: e per la stessa ragione le rette AD, BC sono eguali ed egualmente inclinate, e la retta BC è perpendicolare sopra le due AB, DC; dunque la figura ha i suoi quattro angoli retti, ed i lati opposti fra loro paralleli: questa figura perciò è un rettangolo (*N.*113.), quale appunto si cercava.

133. PROBLEMA. *Dati due lati disuguali* AD, AB *d'un parallelogrammo* (Fig. 67.), *costruire detto parallelogrammo.*

Ai due dati lati si faccia un'angolo BAD uguale all'angolo dato; dall'estremità B tirisi una parallela a AD, e dall'estremità D se ne tiri un'altra ad AB, che seghi la prima in C; e la figura ABCD sarà il parallelogrammo cercato: la dimostrazione di ciò è simile alla precedente.

CAPITOLO QUARTO.

Della Potenza delle Linee.

134. PEr *potenza* d'una linea altro da noi non s'intende che la sua seconda potenza, cioè 'l quadrato d'una linea; e quello che noi ci proponiamo, si è il sapere, quanti quadrati delle sue parti, e quanti prodotti dell'une per l'altre contenga il quadrato d'una linea divisa in più parti uguali, o disuguali; e quale ancora sia 'l rapporto de' quadrati di esse parti ad alcuni prodotti dell'une per l'altre, ec. ciò che meglio si comprenderà mediante le seguenti Proposizioni.

135. PRO-

135. PROBLEMA. *Fare il prodotto di due date linee* AB, AC (Fig. 77.).

Io alzo AB perpendicolarmente sopra AC; poi tiro BD parallela ad AC, e CD parallela ad AB; il che forma un rettangolo ABDC (*N.* 132.) uguale al prodotto ricercato: ed eccone la dimostrazione.

Moltiplicare la linea AB per la linea AC egli è prendere la linea AB tante volte, quante sono l'unità, che si contengono nella linea AC (*Lib. I°. N.* 11.): ora, poichè la linea AC è una serie di punti, il punto è la sua unità; ed in conseguenza, a fin di moltiplicare AB per AC, fa d'uopo pigliare AB tante volte, quanti sono i punti, che si contengono in AC. Si concepisca dunque, che sopra tutt'i punti della linea AC s'alzino delle perpendicolari uguali ciascuna ad AB; elle saranno fra loro parallele (*N.* 68.); e siccome e l'une e l'altre si toccheranno in tutta la loro lunghezza, così la lor somma formerà uno spazio, ch'è 'l rettangolo ABDC: ora, la somma di queste linee non differisce dalla prima, presa tante volte, quante sono l'unità, che si contengono in AC, ovvero moltiplicata in AC; il rettangolo ABCD è dunque uguale al prodotto di AB per AC.

136. AVVERTIMENTO. Forse mi si dimanderà, perchè alle due rette AB, AC io faccia fare un'angolo retto, e non piuttosto un'angolo acuto, od ottuso? E sembra in fatti, che se alle rette AB, AC io facessi fare un'angolo acuto BAC (*Fig.*78.), e che terminassi 'l parallelogrammo ABCD, come sopra (*N.* 133.), sembra, io dico, ch'esso parallelogrammo conterrebbe tante linee uguali ad AB, quanti sono i punti, che si contengono in AB, e che per conseguenza dovrebbe il parallelogrammo esser medesimamente uguale al prodotto delle due linee: ma siccome questo sarebbe error gravissimo, così e'conviene far conoscere in ch'egli consista, mostrando non esservi che 'l rettangolo, uguale al prodotto di dette linee.

Se consideriamo'l punto come indivisibile, aver dee una lunghezza, ed una larghezza infinitamente picciola; e però dobbiam considerarlo come un quadrato minore di quanto immaginar si possa di più picciolo, o come un circoletto, il cui diametro sia minore di qualsivoglia data quantità: ora, altro non sono le linee che le traccie del punto; perciò si hanno a considerar tutte come d'una stessa larghezza infinitamente picciola, ed uguale alla larghezza, o lunghezza del punto, o come de' rettangoli, quali ABEH (*Fig.* 79.), ch'in lunghezza esser possono uguali, o disuguali; ma la cui larghez-

za,

za, cioè la distanza delle parallele AB, EH, o la perpendicolare AH fra queste due parallele è sempre la stessa, ed infinitamente picciola: ciò posto.

Supponiamo, ch' il rettangolo infinitamente picciolo ABEH (*Fig.* 79.) sia la linea da moltiplicarsi per AC; se sovrapponiamo questo rettangolo perpendicolarmente alla linea AC, egli è evidente, che sopra detta linea ei non prenderà che la lunghezza AH d'un punto; e perciò, se si concepisce essere infiniti rettangoli uguali al rettangolo ABEH gli uni presso gli altri, lungo la linea AC, e che tutti sienle perpendicolari, essi saran tanti, quanti sono i punti contenuti dalla linea AC; e per conseguenza la loro somma, o'l primo preso tante volte, quanti sono i punti contenuti in AC, sarà'l prodotto cercato; e questo sarà un rettangolo.

Ora si concepisca, ch' infiniti rettangoli infinitamente piccioli, ed uguali ciascheduno al precedente, sien tutti ugualmente inclinati sopra la linea AC (*Fig.* 80.); quindi n'avverrà, che tutti questi rettangoli non poseran sopra AC che sopra un' angolo delle loro basi, e che lascieranno de' piccioli triangoli rettangoli, come HTV, VXZ, i quali tutti saranno fra loro eguali (*N.* 100.), poichè hanno'l lato TV uguale al lato XZ, l'angolo retto HTV uguale all'angolo retto VXZ, e l'angolo TVH eguale all' angolo XZV, per avere le basi TV, XZ ugualmente inclinate sopra AC: ma a fine di rimediare all'inconveniente di questi triangoli vuoti, io prolungo in A il lato RB; il che mi dà ancora un picciolo triangolo rettangolo uguale a ciascheduno de' triangoli vuoti HTV, ec. e dal punto E io tiro ES parallela ad AH; i triangoli rettangoli ESB, HAR sono perfettamente uguali (*N.*102.), a cagione dell'ipotenuse ES, AH parallele infra le parallele AB, HE, e per conseguenza uguali (*N.* 77.), e a motivo de' lati BE, RH per la ragione medesima altresì uguali; dal rettangolo RBEH sottraendo dunque il triangolo ESB, e'n sua vece ponendo'l triangolo AHR, il parallelogrammo ASEH sarà ancora uguale al rettangolo RBEH: e lo stesso facendo riguardo agli altri rettangoli, s'avrà'l parallelogrammo ASDC uguale alla somma de' piccioli parallelogrammi, o a quella de' rettangoli. Ora, le parti uguali AH, HV, ec. prese da questi parallelogrammi sopra AC, sono maggiori delle grossezze RH, TV, ec. de'rettangoli infinitamente piccioli; necessariamente dunque ne segue, esser minore il numero de' parallelagrammi, o rettangoli, del numero de' punti contenuti dalla linea AC; e per conseguenza il primo rettangolo preso tante volte,

quanti

quanti sono i punti, che si contengon nella linea AC, dee fare una somma maggiore della somma de' piccioli parallelogrammi contenuti nel parallelogrammo ASDG: così questo parallelogrammo non è'l prodotto, che si cerca; e sempre si troverà, che inclinando una linea sopra l' altra, il parallelogrammo sarà minore del prodotto cercato.

137. AVVERTIMENTO II. Io ho detto (*N.* 35.), che se due rette si segano, non segansi ch' in un sol punto; e nell' avvertimento precedente ho provato, ch'una retta linea, la quale sega un' altra retta obbliquamente, prende sopra detta linea una parte maggiore di quello prenderebbe segandola perpendicolarmente; e quindi puossi dedurre, che due rette si possono segare in più d' un punto. Ora, acciò non si creda ch' io mi contradica, proverò, che ben' intese queste due Proposizioni non hanno fra loro veruna opposizione.

Si è dimostrato (*N.* 34.), che se due rette hanno due punti comuni, esse non fanno che una sola retta linea; e quindi si ha dedotto, che le stesse non possono segarsi in due punti; cioè, che se due punti dell' una s'adattan su due punti dell' altra, le due linee non si possono segare: così basta far vedere, che quantunque due linee, le quali si segano obbliquamente, si seghino in una parte maggiore di quello sarebbe, se si segassero perpendicolarmente; tuttavolta giammai vi sono due punti dell' una, che nel modo da noi spiegato s'adattino sopra due punti dell' altra.

Si concepisca dunque, che due rette sieno rappresentate dai rettangoli AB, CD (*Fig.* 81. 82.), le cui larghezze sono infinitamente picciole ed uguali, ovvero dalle serie de' circoletti infinitamente piccioli ed uguali, compresi in detti rettangoli; e si sovrappongano questi due rettangoli, o queste due serie di circoletti l' uno all' altro perpendicolarmente, in modo che si seghino (*Fig.* 81): il picciolo quadrilatero, in cui essi rettangoli si taglieranno, sarà un quadrato, poichè i quattro lati si segano ad angoli retti, e sono uguali, mercè che perpendicolari essendo fra i lunghi lati de' rettangoli, n' esprimono le larghezze, che per ipotesi son' uguali; e siccome i diametri de' circoletti sono uguali ciascuno alla larghezza de' rettangoli egli è evidente, che 'l picciolo quadrato non può contenere se non se l'uno di detti circoli E: così, se si considerano i rettangoli, come rappresentanti delle linee, che si segano perpendicolarmente, queste linee non si segheranno ch' in un sol punto, il quale sarà il picciolo quadrato; e se si considerano le serie de' circoli, come rappresentanti dette linee, elle pure non si seghereanno

ch'in un sol punto, il quale sarà 'l circoletto E; e per conseguenza le due linee altro non avranno di comune che 'l punto E.

Ora si concepisca, che le due obblique AB, CD sieno obblique l'una sopra l'altra (*Fig.* 82.), ovvero (il che è lo stesso) che la linea CD si ravvolga intorno al punto fisso E, in modo che l' angolo DEB diventi obbliquo: i punti H, S della linea CD vicini al punto E potran bene avvanzare un poco sopra i punti R, T della retta AB vicini al punto E; ma i due primi non caderanno assolutamente sopra i due secondi, se non quando la linea CD caderà sulla linea AB; e per conseguenza, finchè CD non caderà sopra AB, la retta HS, tirata fra i due punti H, S della linea CD, non caderà sulla retta RT tirata fra i due punti R, T della retta AD: così, nè i punti H, S, nè i punti R, T potranno esser detti comuni alle due linee, poichè differenti sono le lor direzioni, e 'l solo punto E sarà assolutamente comune all' uno e all'altro; dette due linee non si segheran dunque ch' in un punto comune, quantunque la parte, in cui elle si segano, sia maggiore di quello sarebbe, se si segassero perpendicolarmente.

Per dir vero può spesso succedere, che le linee AB, CD (*Fig.* 82.) si seghino obbliquamente, e che ciò non ostante i punti H, R non avvanzino l'uno sopra l' altro, non meno ch' i punti T, S; e in tal caso pare potersi dire, che le due obblique AB, CD non si segano in una parte maggiore, di quello si segherebbono, se fossero tra loro perpendicolari. Ma convien riflettere, ch' essendo il punto H fuori del punto E, non può E passar dalla posizione E alla posizione H, se durante questo moto il suo centro non iscorre successivamente la distanza, che passa fra lui, e 'l centro del punto H: così, passando il punto E in H, ei prende molte posizioni intermedie fra la posizione E, e la posizione H; siccome passando detto punto E dalla posizione E alla posizione R ne prende molte fra E, ed R; e perciò le posizioni intermedie fra R ed H, o almeno alcune di loro avvanzano sulle posizioni intermedie da E in R, o sopra alcune di esse, e questi avvanzamenti, od anticipazioni fanno, che due obblique AB, CD si seghino in una parte maggiore, di quello si segano, quando son perpendicolari; imperocchè, quantunque allora vi sieno altresì degli avvanzamenti come abbiam detto, esse non fanno tuttavolta, che la parte segata sia maggiore del punto E (*Fig.* 81.), o ch' il picciolo quadrato, in cui trovasi 'l punto E, ed in cui rinchiusi sono tutti gl'immaginabili avvanzamenti, sia

mag-

maggiore. La sola ispezione delle Figure rende ciò manifesto.

Egli sarebbe impossibile render ragione di quanto si è detto nel Problema precedente, e 'n questi due avvertimenti, se con Euclide si dicesse, ch'il punto non ha parti, e che la linea non ha larghezza; e tali diffinizioni appunto han dato campo a molti di dire, ch'i Geometri cadono in gravissimi assurdi. Ciò proveremo ancora con un'Esempio, quando parlerem del circolo.

138. DIFFINIZIONE. In qualsivoglia rettangolo ABDC (*Fig.* 77.) il lato AC, su cui si concepisce ch'ei posi, dicesi *base*; e 'l lato AB, o 'l suo eguale CD perpendicolare sopra la base, chiamasi *altezza*. S'indica un rettangolo con le quattro lettere poste ai quattro angoli, dicendo 'l rettangolo ABCD; o semplicemente colle due lettere poste ai due angoli opposti A, D, dicendo 'l rettangolo AD.

139. PROPOSIZIONE XXIX. *Se due rettangoli hanno le basi e l'altezze uguali, sono uguali.*

Qualunque rettangolo è 'l prodotto della sua base per la sua altezza: ora, per ipotesi, la base dell'uno è uguale alla base dell'altro, e l'altezza dell'uno all'altezza dell'altro; onde i due prodotti, o i due rettangoli non possono fra loro differire.

140. PROPOSIZIONE XXX. *Se una retta* AB (Fig. 83. 84.) *è divisa in due o più parti uguali, o disuguali; il quadrato di detta linea contiene 'l quadrato della prima parte, più due rettangoli della prima per la seconda, più 'l quadrato della seconda, più due rettangoli delle due prime per la terza, più 'l quadrato della terza, più due rettangoli delle prime tre per la quarta, più 'l quadro della quarta; e così successivamente, se vi ha un maggior numero di parti.*

Sia la linea AB (*Fig.* 83.) divisa in due parti AC, CD; faccio 'l suo quadrato AMNB (*N.* 133.); sul lato AM perpendicolare ad AB io piglio la parte AE uguale alla parte AC, e in conseguenza la parte EM equivale alla parte rimanente CB, per essere AE = AC; al punto C io alzo CS perpendicolare sopra AB, ed al punto E alzo ET perpendicolare sopra AM. Perpendicolari essendo le rette AM, CS, BN sopra AB, esse sono fra loro parallele (*N.* 68.), e per la stessa ragione, le rette AB, ET, MN saranno altresì parallele; di più, le rette AM, CS, BN perpendicolari sopra AB sono ancora perpendicolari sopra le rette ET, MN parallele ad AB (*N.* 68.): così tutte queste linee, non meno che le loro parti si segano perpendicolarmente. Ora ciò posto.

Poichè il picciolo quadrilatero AEOC ha i suoi quattro angoli retti, ed i lati AC, AE uguali per la costruzione fra loro, ed alle lor parallele EO, OC, egli è in conseguenza il quadrato della parte AC; siccome anche il quadrilatero SOTN è 'l quadrato dell'altra parte CB; imperocchè i suoi lati OT, SN sono uguali ciascheduno alla parte CB, per essere i medesimi perpendicolari fra le parallele CS, BN; e per la stessa ragione, gli altri due lati OS, TN sono parimente uguali ciascheduno ad EM=CB; in fine, poichè i due rettangoli EMSO, OCBT hanno il lato OC = OE, e'l lato EM uguale al lato CB, sono uguali fra loro, ed uguali ciascheduno al prodotto della parte AC per la parte CB: e però il quadrato AMNB della retta AB, divisa in due parti AC, CB, contiene'l quadrato AEOC della prima parte AC, più due rettangoli EMSO, COTB della prima parte per la seconda, più il quadrato OSNT della seconda.

Sia parimente la linea AB (*Fig.* 84.) divisa in tre parti AC, CD, DB: io faccio il suo quadrato AMNB, e da' punti di divisione C, D alzo sopra DB le perpendicolari CS, DT; sul lato AM piglio la parte AE uguale alla parte AC, la parte EH uguale alla parte CD, e in conseguenza la terza parte HM è uguale alla terza parte DB; finalmente da' punti E, H alzo sopra AM le perpendicolari EZ, HX: così dette perpendicolari tagliano perpendicolarmente le perpendicolari tirate sopra AC per le ragioni sopr'accenate, e tutte queste perpendicolari formano fra loro de'rettangoli.

Ora, il rettangolo AEOC è'l quadrato della prima parte AC, a cagione di AE = AC; i due rettangoli EHVO, CORD sono fra loro eguali, e vagliono ciascuno il prodotto della parte AC per la parte CD, a cagione del lato EO uguale al lato CO, od AC, e del lato EH uguale al lato CD; il rettangolo VORP si è 'l quadrato di CD, a motivo del lato OR = CD, e del lato OV = EH = CD; i due rettangoli HMSV, DRZB sono uguali ciascuno al prodotto della parte AC per la parte DB, a motivo de'lati uguali HM, DB, e de'lati HV, DR uguali ciascuno al lato AC, od AE; i rettangoli VSTP, RPXZ sono altresì uguali fra loro, ed al prodotto della parte CD per la parte DB, a cagione del lato VP, o CD uguale al lato PR = HE = CD, e del lato SV, od MH uguale al lato RZ, o DB; alla fine, il rettangolo PTNX è 'l quadro DB, a motivo del lato PX, o DB uguale al lato PT, od HM: onde'l quadrato della retta AB, divisa in tre parti AC, CD, DB, contiene il quadrato AEOC della prima parte, più

più due prodotti HEOV, CORD della prima per la seconda, più'l quadro OVPR della seconda, più due rettangoli HMSV, DRZB della prima per la terza, con due rettangoli VSTP, RPXZ della seconda per la terza; il che fa insieme due rettangoli delle due prime per la terza, più il quadrato PTNX della terza; è così di seguito.

141. COROLLARIO I°. *Se una linea AB è divisa in due, o più parti* (Fig. 83. 84.), *la diagonale del suo quadrato* AMNB *sega per mezzo tutt' i quadrati delle parti di detta linea.*

La diagonale AN (*Fig.* 85.) divide 'l quadrato AMNB in due triangoli perfettamente uguali (*N.* 119.) : ora, essendo questi triangoli rettangoli, ed isosceli, i due angoli sopra la base di ciascuno d' essi debbono valere insieme un retto; poichè tutti tre gli angoli di qualunque triangolo presi insieme sono uguali a due retti (*N.* 97.); e però qualsivoglia angolo sopra la base dee valere un semiretto, e per conseguente la diagonale AN dee dividere l'angolo retto MAC del quadrato AMNB in due parti eguali. Ora, la diagonale AO del quadrato EACO per la stessa ragione sega altresì per mezzo il medesimo angolo retto EAD; dunque la diagonale AN cade sopra la diagonale AO, e passa pel punto O; donde avviene, ch' ella sega ancora per mezzo il quadrato EACO. Ora, gli angoli eguali EOA, AOC sono uguali agli angoli SON, TON, che lor son' opposti al vertice (*N.* 49.); perciò la linea AN divide pure per mezzo l'angolo retto SOT del quadrato SOTN, ed in conseguenza detta diagonale AN cade sulla diagonale ON del quadrato SOTN, e lo divide in due parti eguali; e così dicasi dell' altre.

142. COROLLARIO II. *Se una linea* AB *è divisa* (Fig.85.) *in più parti eguali, il suo quadrato contiene il quadro dell' una delle sue parti tante volte, quante sono l' unità, che si contengono nel quadrato del numero delle parti.*

Supponiamo, che la linea AB abbia 3 parti: faccio 'l suo quadrato; da' punti di divisione alzo delle perpendicolari sopra AB; divido AM in egual numero di parti, e da' punti di divisione io tiro delle perpendicolari sopra AM. Egli è evidente per la costruzione, ch' io avrò *9* quadrati uguali al quadrato AO della prima parte AC: ora, *9* è 'l quadrato del numero 3 delle parti. Dunque, ec. E così degli altri; e la ragione si è, ch' il quadrato AMNB non è se non se'l prodotto della linea AB = 3 per la linea AM = *3*, il qual'è *9*.

143.

143. COROLLARIO III. Quindi ne segue, *ch' il quadrato d' una linea segata per mezzo è quadruplo del quadrato della sua metà; che quello d' una linea segata in tre parti uguali è nonuplo del quadrato del suo terzo, ec.*

144. PROPOSIZIONE XXXI. *Se una retta* AB (Fig. 86.) *è divisa in molte parti uguali, o disuguali* AC, CD, DB, *il prodotto, o rettangolo della linea* AB *per un' altra* AM *equivale alla somma de' prodotti, o rettangoli di ciascuna parte per la linea* AM.

Sopra tutt' i punti di divisione della linea AB, io alzo le perpendicolari CS, DT, e 'l rettangolo AMNB è diviso in altri tre rettangoli AMSC, CSTD, DTNB, il cui primo si è 'l prodotto, o rettangolo della parte AC per la retta AM; il secondo il prodotto, o rettangolo della seconda parte CD per CS = AM, e 'l terzo quello della terza parte DB per DT = AM: ora questi tre rettangoli compongono il rettangolo totale; dunque, ec.

145. PROPOSIZIONE XXXII. *Se una linea* AB (Fig. 87.) *è divisa in due parti disuguali* AC, CB, *il rettangolo della linea* AB *per l' una delle sue parti* AC *è eguale al rettangolo delle due parti, più 'l quadrato di detta parte* AC.

Io alzo in A la perpendicolare AD uguale ad AC; termino il rettangolo ADEB, e dal punto C alzo la perpendicolare CR sopra AB. Il rettangolo ADEB è adunque 'l rettangolo della retta AB per la sua parte AC, o AD; il rettangolo ADRC si è 'l quadrato della parte AC, e 'l rettangolo CREB quello delle due parti BC, CA, o CR: ora egli è evidente, ch' il rettangolo ADEB è uguale al quadrato ADRC, più 'l rettangolo CREB; dunque, ec.

146. PROPOSIZIONE XXXIII. *Se una retta* AB (Fig. 88.) *è divisa in due parti uguali* AC, CB, *e in due disuguali* AD, DB; *il rettangolo delle due disuguali* AD, DB *equivale al quadrato della metà* AC *della linea, meno il quadrato della parte* DC *intercetta fra i punti di divisione* D, C.

Da un lato io faccio 'l quadro AMNC della metà AC, e ne levo il quadrato DHRC della parte DC; ciò che mi dà un residuo AMNRHD, ch' è una spezie di squadra, la quale volgarmente dicesi *Gnomone*. Dall' altro lato io alzo in D la retta DE perpendicolare sopra AB, ed uguale a AD; e terminando 'l rettangolo DEFB, detto rettangolo sarà lo stesso, che quello delle parti disu-

disuguali AD, BD: così egli trattasi di provare, essere il gnomone AMNRHD eguale al rettangolo DEFB; e perciò prolungo RH in S, il che divide 'l gnomone in due rettangoli SN, SD; prolungo pure NC in P, il che divide parimente 'l rettangolo DEFB in due rettangoli DP, PB: ora, uguali sono i rettangoli SN, PB; imperocchè, a cagione di CN = CA e di CR = CD, abbiamo NR = AD = DE = CP; cioè, uguali sono i due lati NR, CP, non meno che gli altri due MN, CB, a cagione di MN = AC = CB; ed uguali sono altresì i due rettangoli SD, DP, a motivo di AD = DE, e di DC = DH: onde il gnomone è uguale al rettangolo DEFB.

147. COROLLARIO. *Onde 'l rettangolo delle parti disuguali, più il quadrato della parte intercetta* DC, *è eguale al quadrato della metà della linea.*

Per la precedente Proposizione, noi abbiamo $AD \times DB = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$; aggiugnendo dunque ad ambe le parti $\overline{CD}^2$, avremo $AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{CA}^2$.

148. PROPOSIZIONE XXXIV. *Se ad una retta* AB (Fig. 89.), *divisa in due parti uguali* AC, CB, *s'aggiugne un' altra retta* AD; *il rettangolo di tutta la linea* DB *nell' aggiunta* AD *è uguale al quadrato della linea* DC, *composta della metà* AC *e dell' aggiunta* AD, *meno il quadrato della metà* AC *della linea* AB.

Io faccio da un lato il quadro DMNC della linea DC, e ne levo il quadro AHRC della linea AC; ciò che mi dà un residuo, o gnomone DMNRHA. Dall'altro lato io alzo in D una retta DE perpendicolare sopra DB, ed uguale a DA; e terminando 'l rettangolo DEFB, egli è lo stesso che quello delle parti disuguali DB, DA: così e' trattasi di provare, ch' il gnomone DMNRHA sia uguale al rettangolo DEFB; e perciò prolungo RH in S, il che divide 'l gnomone in due rettangoli SN, SA; prolungo pure NC in P, il che divide parimente il rettangolo DEFB in altri due DP, PB: ora, a cagione di DC = CN e di AC = CR, noi abbiamo NR = DA = DE, e a cagione del qnadro DMNC abbiamo MN = NC; onde i due rettangoli SN, DP, che hanno i lati NR, MN uguali ciascuno a ciascuno a' lati DC, DE, sono uguali. Noi abbiamo altresì DA = DE = CP, ed AH = AC = CB; dunque i due rettangoli SA, PB, che hanno i lati DA, AH uguali ciascuno a ciascuno a' lati CP, CB

CB, sono uguali, e per conseguenza il gnomone è uguale al rettangolo DEFB.

AVVERTIMENTO. Le due precedenti proposizioni sovente s' incontrano nella Geometria; perciò sarà util cosa rendersele famigliari.

149. PROPOSIZIONE XXXV. *Se da un punto* O *preso sopra la diagonale* AC *d'un rettangolo, o parallelogrammo* ABCD (Fig. 90. 91.) *tiransi delle rette* RS, TV *parallele a' lati* AD, DC; *i parallelogrammi* RDVO, TOSB, *per cui non passa la diagonale, sono uguali.*

La diagonale divide'l rettangolo, o'l parallelogrammo in due triangoli ADC, ABC perfettamente uguali (*N.* 118.); e le rette RS, TV dividono ciascuno di detti triangoli in due altri triangoli, ed in un rettangolo, o parallelogrammo: ora, diviso anche il rettangolo, o parallelogrammo AROT in due triangoli uguali dalla sua diagonale AO, il triangolo ARO equivale al triangolo ATO; e per la stessa ragione, nel rettangolo, o parallelogrammo OVCS il triangolo OVC è uguale al triangolo OSC: se dunque dal triangolo ADC si tolgono i due triangoli ARO, OVC, e dal triangolo ABC levansi i due triangoli ATO, OSC, il rettangolo, o parallelogrammo RDVO, che resterà da una parte, sarà uguale al rettangolo, o parallelogrammo TOSB, che resterà dall'altra.

CAPITOLO QUINTO.

Delle Ragioni, Proporzioni, e Progressioni Geometriche delle Linee.

150. Qualunque spazio compreso fra due parallele, non terminate da perpendicolari, od obblique, dicesi *spazio parallelo.*

Indefiniti essendo gli spazj paralleli, e non terminati da alcuna parte, la maggiore, o minor lunghezza delle parallele non accresce, nè diminuisce la loro grandezza; e dette parallele considerar si possono come infinitamente prolungate.

151. PROPOSIZIONE XXXVI. *Se uguali sono le perpendicolari* RP, rp (Fig. 92.), *o l' ugualmente inclinate* TS, ts *comprese*

prese fra due spazj paralleli ABCD, abcd, *sono altresì uguali gli spazj paralleli; e se uguali sono gli spazj paralleli, lo sono ancora le perpendicolari, o l'ugualmente inclinate.*

Porto lo spazio ABCD sopra lo spazio *abcd*, sovrapponendo la retta indefinita CD all' indefinita *cd*, talmente che 'l punto P della perpendicolare RP cada sul punto *p* della perpendicolare *rp*; uguali essendo dette due perpendicolari, elle caderanno l'una sopra l'altra; poichè da un' istesso punto *p* non si possono alzare due perpendicolari sopra una stessa linea (*N.* 51.): così la retta indefinita AB caderà sulla retta indefinita *ab*, poichè da un' istesso punto R non si possono tirare due differenti parallele ad una medesima linea (*N.* 68.), e per conseguente i due spazj paralleli saranno perfettamente uguali: si proverà nello stesso modo, che se due ugualmente inclinate TS, *ts* sono uguali, lo sono altresì gli spazj paralleli. Il che doveasi 1.° dimostrare.

Che se si volesse, ch' uguali essendo i due spazj, disuguali fossero le perpendicolari RP, *rp*, o l'inclinate TS, *ts*, io sovrapporrei l'indefinita CD all' indefinita *cd*, tal che'l punto P della perpendicolare RP cadesse sul punto *p* della perpendicolare *rp*; e queste due perpendicolari caderanno l'una sopra l'altra: ma poichè si suppongono disuguali, il punto R caderà di là da *r*, p. e. in Q, se RP è maggiore di *rp*; o di quà dal punto *r*, p. e. in *q*, se RP è minore di *rp*; e si nell' uno che nell'altro caso la parallela AB non caderà sulla parallela AB, poichè ella passerà o per Q, o per *q*, e i due spazj paralleli non saranno uguali; il che è contro l'ipotesi. Se dunque gli spazj paralleli sono uguali, lo sono necessariamente anche le perpendicolari; e si proverà nello stesso modo, che se uguali sono gli spazj, lo sono altresì l'ugualmente inclinate. Il che doveasi 2.° dimostrare.

152. COROLLARIO. Ciò troverebbesi ancora vero, se l'ugualmente inclinate LH, *ts* fossero inclinate in differente verso; imperocchè non s'avrebbe ch' a rovesciare lo spazio ABCD sopra lo spazio *abcd*, cioè non s'avrebbe ch'a sovrapporre l' indefinita AB all'indefinita *cd*, in modo che cadesse la parallela CD dalla banda della parallela *ab*, e ch'il punto dell'inclinata LH cadesse sul punto *s* dell' inclinata *ts*; poichè allora dette due inclinate troverebbonsi inclinate dal medesimo verso, e si proverebbe quanto sopra.

153. PROPOSIZIONE XXXVII. *Se dopo tirate in uno spazio parallelo* ABCD (Fig. 93. 94.) *una perpendicolare* EH, *e quante si voglia altre linee disugualmente inclinate* LM, NQ, TV, ec.

ec. *dividesi la perpendicolare, o qualsivoglia inclinata in due, o più parti uguali, o disuguali; e che da' punti di divisione di detta line.: si tirino delle parallele alle parallele* AB, CD: *dico, che l'altre linee tirate fra dette due parallele* AB, CD *saranno divise dalle parallele tirate infra due, nella stessa ragione della linea, che prima sarà stata divisa.*

Supponiamo, che l'inclinata LM sia stata divisa in due parti LP, PM (*Fig.93.*), le quali sieno tra loro in qualsivoglia ragione, e che dal punto di divisione P s'abbia tirata la retta XPZ parallela alle parallele AB, CD. Concepisco, che da tutt' i punti della linea LM sieno tirate delle parallele ad AB, o a CD; tutte queste parallele divideranno lo spazio parallelo ABCD in altrettanti spazj paralleli, quante sono le picciole parti uguali, che si conterranno dalla linea LM; e siccome la linea LM è ugualmente inclinata sopra tutte queste parallele, poichè tutti gli angoli dalla stessa banda sono eguali, e perchè in conseguenza tutte le sue parti uguali sono ugualmente inclinate ne' loro piccioli spazj paralleli, ne segue; che tutti gli spazj sono fra loro uguali (*N.* 151.): ora, la perpendicolare EH, e l'altre inclinate NQ, ec. sono dai piccioli spazj paralleli uguali divise in egual numero di parti che la linea LM; e mercè che ciascuna di queste linee è ugualmente inclinata in qualunque spazio, tutte le parti di ciascheduna d'esse sono fra loro uguali (*N.* 151.): e così, siccome non vi sono più piccioli spazj da L in P, che da E in O, e da P in M, che da O in H, ne segue, ch'il numero di parti uguali di LM, contenute nella sua parte LP, è al numero di parti uguali contenute nella sua parte PM, come 'l numero di parti uguali della perpendicolare EH, contenute nella sua parte EO, è al numero di parti uguali contenute in OH; cioè LP. PM: : EO. OH; e però la perpendicolare EH è divisa in O, nella stessa ragione che l'inclinata LM lo è in P.

Si proverà parimente, che l'altre inclinate NQ, TV, ec. son divise da XZ nella stessa ragione della retta LM; e lo stesso ancora sarebbe, se la linea LP fosse stata divisa in un numero maggiore di parti LP, PS, SM (*Fig. 94.*).

154. COROLLARIO I.° *Quindi ne segue, che gli spazj paralleli disuguali sono fra loro come le perpendicolari, o come l'ugualmente inclinate fra esse parallele; e che le perpendicolari, o l'ugualmente inclinate fra gli spazj paralleli disuguali sono fra lor come gl'ispazj.*

Imperocchè il numero de' piccioli spazj uguali contenuti nello spa-

ſpazio parallelo ABXZ (*Fig.* 93.) è al numero de' piccioli ſpazj uguali contenuti nello ſpazio XZCD , come il numero di parti uguali, contenute nella parte EO della perpendicolare EH , è al numero di parti uguali contenute nella parte OH ; e però lo ſpazio parallelo ABXZ è allo ſpazio XZCD , come la parte EO della perpendicolare è alla parte OH, o come la parte LP dell' obbliqua LM è alla parte PM di queſta ſteſſa obbliqua ; cioè li due ſpazj ABXZ, XZCD ſono fra loro come le lor perpendicolari LO , OH , o come le loro ugualmente inclinate LP, PM.

Così pure , contenendo la perpendicolare EO tante parti uguali, quanti ſono i piccioli ſpazj paralleli uguali contenuti dallo ſpazio parallelo ABXZ, e contenendo la perpendicolare OH tante di queſte ſteſſe parti uguali, quanti di queſti piccioli ſpazj ſi contengono dallo ſpazio XZCD, ne ſegue, che la perpendicolare EO ſi è alla perpendicolare OH, come lo ſpazio parallelo ABXZ è allo ſpazio XZCD ; e lo ſteſſo dicaſi dell' ugualmente inclinate LP, PM.

155. COROLLARIO II. *Eſſendo* LP, PM : : EO. OH (*N.* 153.) , *ſi può dire componendo* LP + PM. PM : : EO + OH. OH , *od* LM. PM : : EH. OH .

Imperocchè egli è evidente, ch' il numero di parti uguali contenute in LM è al numero di parti uguali contenute nella ſua parte PM, come 'l numero di parti uguali contenute in EH è al numero di parti uguali contenute in OH ; giacchè 'l numero di parti contenute in LM equivale al numero di parti contenute in EH , ſiccome il numero di parti contenute in MP equivale al numero di parti contenute in HO ; e ſi proverà nell' iſteſſa maniera , che LM. PL : : EH. OE.

Donde ſi deduce queſta regola generale ; che *ſe due , o più linee* LM, EH *ſon diviſe ciaſcheduna in due parti , le quali ſieno in proporzione , qualunque parte dell' una è a tutta la linea , come la parte ſimile dell' altra è a tutta la ſua* ; ed eſtendeſi ancora detta regola a due , o più linee LM , EH (*Fig.* 94.) , che foſſero diviſe in numero maggiore di parti fra loro proporzionali : ciò che ſi dimoſtra ſempre nello ſteſſo modo.

156. COROLLARIO III. Si potrà agevolmente provare con ragionamento ſimile a quello del precedente Corollario, che ſe due linee LM, EH (*Fig.* 93.) ſon diviſe in due parti proporzionali, tal che s' abbia LP, PM : : EO , OH , poſſono ſopra queſti quattro termini farſi tutt' i cangiamenti, di cui abbiam parlato nel primo Libro n°. 279. 280. ec. e vi ſarà ſempre proporzione ; così egli

s' ha il contento di vedere, che le verità Matematiche si provano con differenti principj, di cui gli uni aggiungono chiarezza agli altri.

157. COROLLARIO IV. *Se più rette* LM, EH, ec. (Fig. 93. 94.), *contenute fra due parallele* AB, CD, *son segate in due, o più parti fra loro proporzionali, le rette linee tirate dai punti di divisione di queste linee sono parallele alle parallele* AB, CD.

Le rette LM, EH (*Fig.* 93.) sono divise proporzionalmente ne' punti P, O: se vogliamo, che la retta tirata da O in P non sia parallela alle rette AB, CD, la parallela tirata dal punto O segherà dunque LM o di sotto di P come in R, o di sopra come in S: supponiamo, che questa parallela seghi LM in R; dunque, a motivo di OR parallela alle parallele AB, CD, noi avremo EO, OH : : LR, RM (*N.* 153.) : ora, per la supposizione, abbiamo altresì EO, OH : : LP, PM; così, uguale essendo ciascuna delle due ragioni LR, RM, ed LP, PM alla ragione EO, OH, esse saranno fra loro uguali; noi avremo perciò LR, RM : : LP, PM; il che è impossibile, poichè l' antecedente LR è maggiore rispetto al suo conseguente RM, che l' antecedente LP rispetto al suo conseguente PM.

Parimente, se la parallela tirata dal punto O segasse LM in S, avremmo EO, OH : : LS, SM (*N.* 153.); e per la supposizione avremmo altresì EO, OH : : LP, MP; onde LS, SM : : LM, MP; il ch' è ancora impossibile, poichè LS è minore rispetto al suo conseguente SM, che LP rispetto al suo conseguente MP: necessariamente dunque conviene, che la parallela tirata dal punto O passi per lo punto M.

Proveremo nello stesso modo, che se le rette LM, EH (*Fig.* 94.) son divise in più di due parti fra loro proporzionali, le rette OP, RS, che congiungono i loro punti di divisione, sono parallele alle parallele AB, CD.

158. PROPOSIZIONE XXXVIII. *Se i lati* BA, BC (Fig. 95.) *d' un triangolo* ABC *sono tagliati da una, o più linee* MN, ec. *parallele alla base, essi son tagliati proporzionalmente; e viceversa, se i lati sono tagliati proporzionalmente, le linee che li segano son parallele alla base.*

Dal vertice B io tiro la retta RS parallela alla base; il che mi dà uno spazio parallelo RSAC, in cui i lati AB, BC sono linee inclinate. Ora, se le linee MN, ec. che segano quest' inclinate, son parallele alla base AC, od RS, si proverà come sopra (*N.* 153.), che l' inclinate AB, BC sono segate nella stessa ragione; e se l' in-

inclinate AB, BC sono tagliate nella stessa ragione, si proverà altresì come sopra (*N.* 157.), che le rette MN, ec. le quali passano pe' loro punti di divisione, son parallele ad AC, od RS.

159. PROPOSIZIONE XXXIX. *Se due triangoli* ABC, abc (Fig.96.) *hanno i tre angoli* A, B, C *uguali ciascuno a ciascuno ai tre angoli* a, b, c, *i lati opposti a' medesimi angoli sono proporzionali.*

Dagli angoli B, *b* io tiro le rette MN, *mn*, parallele a' lati opposti AC, *ac*; il che mi dà due spazj paralleli MNAC, *mnac*, in cui sono ugualmente inclinati i lati AB, *ab*, per essere l'angolo A uguale all'angolo *a*; siccome lo sono i lati BC, *bc*, per essere l'angolo B uguale all'angolo *b*: così 'l lato AB è al lato *ab*, come lo spazio MNAC è allo spazio *mnac* (*N.* 154.), e 'l lato BC è al lato *bc*, come lo stesso spazio parallelo MNAC è allo spazio parallelo *mnac*; dunque la ragione de' lati AB, *ab* è uguale alla ragione de' lati BC, *bc*, poichè amendue equivagliono alla ragione degli spazj; e però AB, *ab* :: BC, *bc*. Parimente, dal vertice degli angoli uguali C, *c* io tiro le rette RS, *rs* parallele a' lati opposti AB, *ab*; e a cagione degli angoli A, B, uguali ciascuno a ciascuno agli angoli *a*, *b*, i lati AC, *ac*, BC, *bc* sono ugualmente inclinati negli spazj paralleli ABRS, *abrs*; così noi abbiamo AC, *ac* :: ABRS, *abrs*, e BC, *bc* :: ABRS, *abrs* (*N.* 154.); e però AC, *ac* :: BC, *bc*: ma abbiam ritrovato AB, *ab* :: BC, *bc*; dunque AC, *ac* :: AB, *ab*, cioè i lati del triangolo ABC sono proporzionali a quei del triangolo *abc*.

160. COROLLARIO. *Se due triangoli* ABC, abc (Fig.96.) *hanno i lati proporzionali, gli angoli opposti a' lati proporzionali sono uguali.*

Col lato AC faccio in A un'angolo CAX uguale all'angolo *a*, ed in C un'angolo ACX uguale all'angolo *c*; e per conseguente il terzo angolo AXC del triangolo AXC è uguale al terzo *b* del triangolo *abc* (*N.* 97.), e questi due triangoli AXC, *abc* hanno i lati proporzionali (*N.* 159.); onde noi abbiamo *ac*, *ab* :: AC, AX: ma per ipotesi *ac*, *ab* :: AC, AB; dunque AC, AX :: AC, AB, o alternando AC, AC :: AX, AB; ed in conseguenza, a cagione di AC = AC, abbiamo il lato AX del triangolo AXC uguale al lato AB del triangolo ACB. Parimente, ne' triangoli *abc*, AXC abbiamo *ac*, *cb* :: AC, CX, e per l'ipotesi abbiamo altresì *ac*, *cb* :: AC, CB; dunque AC, CX :: AC, CB, e in conseguenza, per essere AC = AC, abbiamo il lato CX

del

del triangolo ACX uguale al lato CB del triangolo ABC: così, perciocchè i due triangoli AXC, ABC hanno 'l lato AC comune, e i due lati dell'uno uguali ciascuno a ciascuno a' due lati dell'altro, sono perfettamente uguali (*N.* 100.); e i tre angoli dell'uno sono uguali ciascuno a ciascuno a' tre angoli dell' altro: ma i tre angoli del triangolo AXC sono stati costruiti uguali a' tre angoli del triangolo *abc*; dunque i tre angoli del triangolo *abc* sono uguali ai tre angoli del triangolo ABC.

161. PROPOSIZIONE XL. *Se due lati* AB, BC *d' un triangolo* ABC (Fig. 97.) *sono proporzionali a' lati* ab, bc *d' un' altro triangolo* abc, *e che l' angolo* B *contenuto dai due primi sia uguale all' angolo* b *contenuto dagli altri due; i tre lati del triangolo* ABC *sono proporzionali ai tre lati del triangolo* abc.

Sopra 'l lato *ab* del triangolo maggiore *abc* piglio una parte *bm* uguale al lato AB dell' altro triangolo, e dal punto *m* tiro *mn* parallela alla base *ac*; i due triangoli *abc*, *mbn* hanno i tre angoli uguali, poichè l'angolo *b* è comune, e a motivo delle parallele *ac*, *mn* gli angoli dalla stessa parte *bac*, *bmn* sono uguali (*N.* 71.), non meno che gli angoli *bca*, *bnm*; questi triangoli han dunque i lati proporzionali (*N.* 159.), e noi abbiamo *ab*, *bc* : : *bm*, *bn*: ora, per ipotesi, si ha altresì *ab*, *bc* : : AB, BC; onde *bm*, *bn* : : AB, BC, o alternando *bm*, AB : : *bn*, BC: ma *bm* equivale per la costruzione ad AB; dunque *bn* = BC, e i due triangoli *mbc*, ABC sono perfettamente uguali (*N.* 100.), a cagione dell'angolo B uguale all'angolo *b*, e de' lati, che comprendono l' angolo B, uguali a' lati, che comprendon l'angolo *b*: così, poichè i triangoli *mbn*, *abc* hanno i tre angoli uguali ciascuno a ciascuno, i triangoli ABC, *abc* avranno altresì i tre angoli uguali ciascuno a ciascuno; e però i loro lati saran proporzionali (*N.* 159.).

162. DIFFINIZIONE. Due, o più figure son dette *Simili*, quando esse hanno gli angoli uguali ciascuno a ciascuno, e ch' i lati opposti agli angoli uguali sono proporzionali.

163. AVVERTIMENTO. Ne' triangoli basta conoscere, ch' i tre angoli sono uguali ciascuno a ciascuno ai tre angoli, o che i lati sono proporzionali, a fine di poter asserire, che son simili; poichè l'una di queste condizioni seco trae necessariamente l' altra (*N.* 159. 160.). E lo stesso dicasi di tutt' i poligoni regolari d' un' egual numero di lati, ed in conseguenza composti d' egual numero di triangoli simili. Ma non può questo asserirsi dell'

altre

altre figure. Ogni rettangolo ha i quattro angoli retti, e in conseguenza uguali, e non ostante tutt' i rettangoli non hanno i lati proporzionali: supponiamo p. e. ch' i due rettangoli ABCD, *abcd* abbiano i lati proporzionali, cioè che s'abbia AB, AD :: *ab*, *ad*. Non ho che a diminuire, od accrescere il lato *ab* del rettangolo *abcd*, e tosto i lati più non saranno proporzionali; imperocchè prolungando *ab* in *e*, il che ci darà il rettangolo *aefd*, più non avremo AB, AD :: *ae*, *ad*, giacchè n'avverrebbe *ab*, *ad* :: *ae*, *ad*, ed in conseguenza AB sarebbe uguale ad *ae*, a cagione di *ad* = *ad*; il ch'è impossibile. Similmente, i lati d'un parallelogrammo possono essere proporzionali a' lati d' un rettangolo, senza che i loro angoli sieno uguali; e perciò, a fine che non nasca verun' equivoco sopra 'l termine di figure simili, dicasi mai sempre, che tutti gli angoli debbono essere uguali ciascuno a ciascuno, e che i lati opposti agli angoli uguali son proporzionali.

164. PROPOSIZIONE XLI. *Le Figure simili possono dividersi sempre in uno stesso numero di triangoli simili.*

Sieno i due pentagoni irregolari ABCDE, *abcde* (*Fig.99.*) simili fra loro; dagli angoli uguali B, *b* tiro delle rette a tutti gli angoli, a cui ne posso tirare, il che divide ciascuno di questi poligoni in tre triangoli. Ora, avendo i due triangoli BAE, *bae* l'angolo A uguale all'angolo *a*, ed i lati AB, AE proporzionali a' lati *ab*, *ae*, per ipotesi, sono simili fra loro (*N. 161.*); l'angolo AEB è dunque uguale all'angolo *aeb*, e siccome l'angolo AED è uguale all' angolo *aed*, per ipotesi, l'angolo BED è altresì uguale all' angolo *bed*: ora, ne' triangoli simili ABE, *abe*, le rette BE, *be* sono proporzionali a'lati AE, *ae*, e questi sono proporzionali a' lati ED, *ed*; onde le rette BE, *be* son parimente proporzionali a'lati ED, *ed*, e per conseguenza, a motivo dell'angolo BED contenuto dalle rette BE, ED, uguale all' angolo *bed* contenuto dalle rette *be*, *ed*, anche i triangoli BED, *bed* son simili; e così per ordine simili si proveranno gli altri due triangoli BCD, *bcd*. Dunque, ec.

165. DIFFINIZIONE. I contorni, o circuiti delle Figure simili regolari, od irregolari diconsi *Perimetri*.

166. PROPOSIZIONE XLII. *I perimetri, o contorni delle figure simili sono fra loro come i loro lati omologhi, o come i lor raggi, o come i loro Apotemi, se dette figure hanno de' raggi, e degli Apotemi; ovvero sono come le linee similmente poste, cioè tirate o da angoli uguali, o da pun'', che segano i lati omologhi in simil*

mil ragione, e che formano angoli uguali volti dalla stessa banda.

Sieno i due esagoni regolari ABCDEF, *abcdef* (*Fig.* 100.) divisi amendue ne' loro sei triangoli uguali e simili, a cagione dell' egualità degli angoli; uguali essendo fra loro i sei lati del primo, non meno ch' i sei del secondo, egli è evidente, che la ragione del lato AB al lato *ab* è la medesima che quella del lato BC al lato *bc*, e così successivamente; dunque i sei lati del primo presi insieme, cioè 6AB, conterranno tante volte i sei lati del secondo presi insieme, o *6ab*, quante volte AB contiene *ab*: ora, i sei lati del primo formano 'l contorno del primo, e i sei del secondo forman quello del secondo; dunque 'l contorno del primo è a quello del secondo, come il lato omologo AB è al lato omologo *ab*.

Ma ne' triangoli simili AOB, *aob* noi abbiamo AB, *ab*:: AO, *ao*; dunque, poichè i contorni sono fra loro come i lati AB, *ab*, sono ancora come i raggi AO, *ao*. Tiro gli Apotemi OR, *or*, che segano per mezzo le basi BA, *ba* de' triangoli isosceli AOB, *aob* (*N.*107.), e poichè le basi BA, *ba* sono proporzionali ai raggi OA, OA, le loro metà RA, *ra* sono altresì proporzionali a' medesimi raggi; e però, a motivo dell' angolo contenuto RAO uguale all' angolo contenuto *rao*, i triangoli RAO *rao* hanno tutt' i loro lati proporzionali (*N.* 161.); dunque AO, *ao* : : OR, *or*: ma i perimetri sono fra loro come I raggi AO, *ao*; ond' essi sono ancora come gli apotemi OR, *or*.

Sopra i lati AF, *af* io prendo le parti AH, *ah* uguali ciascuna p. e. al terzo di dette linee, e da' punti H, *h* tiro delle rette HS, *hs*, che con le linee AF, *af* formano angoli uguali, e dalla stessa banda; queste linee HS, *hs* son dunque similmente poste: ora, i triangoli HSF, *hsf* avendo i due angoli sopra HF uguali ciascuno a ciascuno a' due angoli sopra *hs*, il terzo è in conseguenza uguale al terzo (*N.* 97.), e i due triangoli son simili; dunque HF, *hf* : : HS, *hs*: ma, perocchè le rette HF, *hf* sono i due terzi de' lati AF, *af*, esse son proporzionali a questi lati; onde i lati AF, *af* sono fra loro come le similmente poste HS, *hs*; ed in conseguenza, essendo fra loro i contorni come i lati AF, *af*, sono altresì come le similmente poste HS, *hs*.

Simili essendo i triangoli HSF, *hsf*, abbiamo SF, *sf* : : HF, *hf*: ora, HF, *hf* : : AF, *af*, ed AF, *af* : : OF, *of*; dunque OF, *of* : : SF, *sf*, o alternando OF, SF : : *of*, *sf*. Perciò dividendo avremo OF — SF, OF : : *of* — *fs*, *of*, cioè OS, OF : : *os*,

: : *os*, *of*, ovvero OS, *os* : : OF, *of*. Ora, se prolungo le rette HS, *hs* in T, *t*, gli angoli OST, *ost* saranno uguali, mercè che uguali sono i loro angoli opposti al vertice; e siccome gli angoli SOT, *sot* sono altresì uguali, così 'l terzo OTS sarà uguale al terzo *ots*, e i due triangoli OST, *ost* saranno simili; il che ci dà ST, *st* : : SO, *so*: ora, SO, *so* : : OF, *of*, ed i contorni sono fra loro come i raggi OF, *of*; ond' essi sono ancora come le similmente poste ST, *st*.

In somigliante maniera proveremo, che prolungate le rette ST, *st* in V, ed *u*, i perimetri saranno fra loro, come le similmente poste TV, *tu*, e come le tre linee HS, ST, TV sono a ciascuna delle tre *hs*, *st*, *tu*, in ragione dei perimetri: così ancora proveremo, che le tre insieme HS, ST, TV, cioè la linea HV, sono alle tre insieme *hs*, *st*, *tu*, cioè alla linea *hu*, similmente poste, in ragione de' perimetri.

E lo stesso si dimostrerà nelle Figure simili irregolari (*Fig. 99.*), potendosi sempre dividerle in egual numero di triangoli simili (*N.* 164.).

167. PROPOSIZIONE XLIII. *Se l'uno degli angoli* B *d' un triangolo* ABC (Fig. 101.) *divides' in due parti eguali da una retta* BE, *che sega il lato opposto* AC, *i segmenti* AE, EG *del lato* AC *sono fra loro come i lati* AB, AC.

Dagli angoli A, C conduco delle rette RS, MN parallele a BE; il che mi dà due spazj paralleli RSEB, MNEB: ora, uguali essendo per la costruzione gli angoli ABE, CBE, i lati AB, BC sono ugualmente inclinati fra questi due spazj, e quindi sono fra essi come i loro spazj medesimi: così pure, a motivo dell' angolo CEX uguale al suo opposto al vertice AEB, i segmenti AE, EC sono ugualmente inclinati ne' loro spazj, e sono fra loro come questi spazj medesimi; dunque la ragione de' lati AB, BC è la stessa di quella de' segmenti AE, BC, l' una e l' altra essendo la medesima della ragione degli spazj; e però AE, EC : : AB, BC.

168. PROPOSIZIONE XLIV. *Se dal vertice dell' angolo retto* ABC (Fig. 102.) *tirasi sopra l' ipotenusa* AC *una perpendicolare* BR, *il triangolo sarà diviso in due altri triangoli rettangoli* ABR, RBC *simili fra loro, ed al triangolo* ABC.

I triangoli ABC, ABR hanno l' angolo retto ABC uguale all' angolo retto ARB, e l' angolo acuto A comune ad amendue; il terzo è dunque uguale al terzo (*N.* 98.), e i due triangoli sono simili (*N.* 162.). Per la stessa ragione i triangoli ABC,

BRC, che hanno l'angolo C comune, e l'angolo retto uguale all' angolo retto, son simili fra loro; donde ne segue, ch' i due triangoli ARB, BRC sono simili, non potendo esser simili al triangolo ABC, quando ciascuno non abbia i tre angoli uguali ai tre angoli di detto triangolo, e però uguali fra loro.

169. COROLLARIO I°. *La perpendicolare* BR, *tirata dal vertice dell' angolo retto sopra l' ipotenusa* AC, *è media proporzionale fra i segmenti* AR, RC *della stessa.*

I triangoli ABR, BRC son simili (*N. 168.*); e però i lati opposti agli angoli uguali sono proporzionali: ora, simili essendo pure i triangoli ABR, ABC (*N. 168.*), e ad amendue comune l' angolo acuto A, dee l'angolo acuto ABR del triangolo ABR essere uguale all' altro angolo acuto ACB; e siccome quest' angolo ACB appartiene al triangolo rettangolo BRC simile al triangolo ABR, ne segue, che l' altro angolo acuto A del triangolo ABR è uguale all'angolo acuto CBR del triangolo CBR. Onde in questi due triangoli ABR, BRC il lato AR del triangolo ABR, opposto all'angolo ABR, è al lato RB del medesimo triangolo opposto all'angolo A, come il lato RB del triangolo RBC, opposto all'angolo C uguale al angolo ABR, è al lato RC di questo stesso angolo, opposto all' angolo RBC uguale all' angolo A. Così AR, RB :: RB, RC; e conseguentemente RB è media proporzionale fra i segmenti AR, RC dell'ipotenusa.

170. COROLLARIO II. *Tirata la perpendicolare* BR *dal vertice dell' angolo retto sopra l' ipotenusa, ciascun lato* AB, BC *del triangolo rettangolo* ABC *è medio proporzionale fra l' ipotenusa, e 'l segmento dell' ipotenusa, che trovasi dalla sua banda.*

I triangoli ABR, ABC son simili (*N. 168.*), e noi abbiam già veduto, che l'angolo ABR è uguale all'angolo C. I lati AR, AB del triangolo ARB son dunque proporzionali a' lati AB, AC del triangolo ABC, essendo per se manifesto, che questi lati son' opposti ad angoli uguali. Così abbiamo AR, AB :: AB, AC, cioè, 'l lato AB è medio proporzionale fra 'l segmento AR dell' ipotenusa, che trovasi dalla sua banda, e l'intera ipotenusa AC.

Parimente, simili sono i triangoli BRC, ABC (*N. 168.*), e l'angolo RBC è uguale all'angolo A; onde i lati RC, BC del triangolo RBC sono proporzionali a' lati BC, AC del triangolo ABC: così RC, BC :: BC, AC; cioè, il lato BC è medio proporzionale fra 'l segmento RC, e 'l ipotenusa AC.

171. COROLLARIO III. *In qualsivoglia triangolo rettangolo*

ABC

ABC (Fig. 103.), *il quadrato dell' ipotenusa è uguale a' quadri degli altri due lati presi insieme.*

Dal vertice B dell'angolo retto io tiro la perpendicolare BR sopra l'ipotenusa, e per lo Collorario precedente si ha AR, AB :: AB, AC; e facendo 'l prodotto degli estremi, e 'l quadrato della media, si ha AR × AC = $\overline{AB}^2$: così alzando in A una perpendicolare AP = AC, e terminando 'l rettangolo APQR, egli sarà uguale al quadro BMNA del lato AB. Ora pel medesimo Corollario precedente, RC, CB :: CB, AC; dunque RC × AC = $\overline{CB}^2$; e perciò, alzando in C la perpendicolare CS = AC, e terminando 'l rettangolo CSQR, e' sarà uguale al quadro CBTV del lato CB; dunque i due rettangoli APQR, CSQR presi insieme sonó uguali ai due quadrati BMNA, CBTV: ma i due rettangoli presi insieme formano il quadrato APSC dell'ipotenusa AC, poichè i lati AR, AC presi insieme fanno l'ipotenusa AC, e perchè AP per la costruzione è uguale ad AC; dunque il quadrato dell' ipotenusa è uguale ai quadri degli altri due lati presi insieme.

172. PROBLEMA. *Dati i tre lati* AB, BC, AC *d'un triangolo rettangolo* (Fig. 103.), *conoscere la perpendicolare* BR *tirata dall' angolo retto sopra l' ipotenusa, ed i segmenti* AR, AC.

Noi abbiamo AR × AC = $\overline{AB}^2$ (*N.* 170.); dividendo dunque d'amendue le parti per AC, avremo AR = $\frac{\overline{AB}^2}{AC}$; cioè, se si fa 'l quadro del valore del lato AB, e che dividasi pel valor dell' ipotenusa, il quoziente sarà 'l segmento AR; e dal valore dell'ipotenusa sottraendo il valor di questo segmento, il residuo sarà l' altro segmento RC.

Ora, rettangolo essendo il triangolo ARB, e 'l lato AB essendo la sua ipotenusa, avremo $\overline{AB}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RB}^2$; e però, d'amendue le parti sottraendo $\overline{AR}^2$, avremo $\overline{AB}^2 - \overline{AR}^2 = \overline{RB}^2$; cioè, che se dal quadro del dato lato AB levas'il quadro del segmento AR, che puossi conoscere come abbiam veduto, il residuo sarà 'l quadrato della perpendicolare, e la radice quadra di detto residuo sarà 'l valore della stessa.

173. PROPOSIZIONE XLV. *In qualsivoglia triangolo* ABC (Fig. 104.), *il quadro del lato* AC *opposto ad un'angolo acuto* B *è ugua-*

è uguale alla somma de' quadri degli altri lati AB, BC, *meno due rettangoli fatti dall' una de' lati* BC *per la sua parte* BO, *segata dalla banda di* B *per la perpendicolare* AO, *tirata dall' angolo opposto* A.

Faccio 'l quadro ADEC del lato AC, il quadro ABRS di AB, il quadro CBTV di CB, e'l quadro COZX di CO. Prolungo OZ in L, ed XZ in F: così, siccome il quadrato di BC contiene 'l quadro della sua parte OC, più 'l quadro della sua parte BO, più due rettangoli uguali delle due parti (*N.* 140.); detti due rettangoli uguali sono OBFZ, ZLVX, e aggiugnendo al primo il quadrato FTLZ della parte BO, ed al secondo un quadrato HIVX, uguale al medesimo quadro di BO, i due rettangoli BOTL, ZLIH saranno uguali, e saran due prodotti di BO per BT, o BC. Posto questo.

Nel triangolo rettangolo AOC abbiamo $\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{CO}$: ora, il quadro del lato BC supera 'l quadro $\overline{CO}$ dell' intero gnomone BTVXZO; e siccome nel triangolo rettangolo ABO il quadro del lato AB, ch' è l' ipotenusa di esso triangolo rettangolo, è uguale al quadrato $\overline{AO}$ più 'l quadro $\overline{BO}$, e ch' in conseguenza il quadrato $\overline{AB}$ supera 'l quadro $\overline{AO}$ del valore di $\overline{BO}$, cioè del picciolo quadrato XVIH; ne segue, ch' i quadrati di BC, AB superano i quadri $\overline{AO} + \overline{CO}$, cioè il quadrato $\overline{AC}$ del valore del gnomone BTVXZO, più quello del picciolo quadrato VIHX, e per conseguenza del valore de' due rettangoli OBTL, ZLIH, o di due prodotti della parte BO per BT, o BC. Dunque $\overline{AC} = \overline{AB} - 2BO \times BC$.

174. PROBLEMA. *Dati i tre lati d' un triangolo* (Fig. 104.), *in cui la perpendicolare* AO, *tirata dall' uno degli angoli* A *sul lato opposto* BC, *cade infra 'l triangolo, conoscer la perpendicolare, ed i segmenti* BO, OC *del lato* BC.

Cadendo la perpendicolare AO infra 'l triangolo, i triangoli ABO, ACO, formati da' lati AB, AC col lato BC, sono acuti, perocchè la perpendicolare cade sempre dalla banda degli angoli minori formati dall' obblique (*N.* 83.): così, essendo 'l lato AC opposto ad un' angolo acuto B, avremo $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} - 2BO \times BC$;

e ad

e ad amendue le parti aggiungendo $2BO \times BC$, e poi levando $\overline{AC}^2$, avremo $2BO \times BC = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$, e'l tutto dividendo per BC, noi avremo $2BO = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{BC}$; cioè, che se dalla somma de'quadri de'lati AB, BC levasi'l quadro del lato AC, e che si divida 'l residuo pel lato BC, il quoziente sarà 'l doppio del segmento BO, e la metà del quoziente sarà'l segmento BO; perciò, se dal lato BC togliesi 'l segmento BO, il residuo sarà'l valore dell'altro segmento OC.

E siccome nel triangolo rettangolo ABO abbiamo $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$ (*N.* 172.), e che levando $\overline{BO}^2$ da amendue le parti, abbiamo $\overline{AB}^2 - \overline{BO}^2 = \overline{AO}^2$; ne segue, che se dal quadro del dato lato AB levas' il quadro del segmento BO, che puossi conoscere come abbiam veduto, il residuo sarà 'l quadro della perpendicolare AO; e la radice di detto residuo sarà 'l valore di AO.

175. PROPOSIZIONE XLVI. *In qualsivoglia triangolo ottusangolo* ABC (Fig.105.), *il quadro del lato* AC *opposto all'angolo ottuso* ABC *è uguale ai quadri de' lati* AB, BC, *più due rettangoli del lato* BC, *sopra cui cade la perpendicolare tirata dall' angolo opposto* A *pel prolungamento* EO *di detto lato fino alla perpendicolare.*

Faccio il quadro ADEC del lato AC, il quadro AORS della perpendicolare AO, il quadrato COZX di OC, e'l quadro CBTV di CB. Prolungo le rette BT, VT in L, F; e siccome il quadrato di OC contiene quello della sua parte BC, più 'l quadro dell' altra parte OB, più due rettangoli uguali delle due parti (*N.* 140.), questi due rettangoli uguali sono BOFT, TLXV, e ciascuno di loro si è'l prodotto di OB per BC. Posto questo.

Rettangolo essendo il triangolo AOC, abbiamo $\overline{AC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OA}^2$: ora, il quadro di OC vale il quadro del lato BC, più l'intero gnomone BOZXVT; e siccome nel triangolo rettangolo AOB, la cui ipotenusa si è AB, noi abbiamo $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$, e che d' amendue le parti togliendo $\overline{AO}^2$, abbiamo $\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{AO}^2$; ne segue, ch'il quadro $\overline{AC}^2$, o i due quadrati insieme $\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2$ va-

vagliono il quadrato $\overline{BC}^2$, più 'l gnomone BOZXVT, più 'l quadro $\overline{AB}^2$, meno il quadrato $\overline{OB}^2$, cioè meno 'l quadro TFZL: ma altro non è il gnomone BOZXVT, meno il quadrato TFZL ch' i due rettangoli BOFT, TLXV, i quali vagliono 2OB × BC; dunque $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 + 2OB \times BC$.

176. PROBLEMA. *Dati i tre lati d'un triangolo ottusiangolo* ABC (Fig. 105.), *conoscer la perpendicolare tirata dall'uno degli angoli acuti* A *sul lato opposto* BC, *e'l prolungamento di detto lato sopra la perpendicolare.*

Noi abbiamo $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 + 2OB \times BC$ (*N.* 175.); però, d'amendue le parti sottraendo i quadrati $\overline{CB}^2$, $\overline{AB}^2$, avremo $\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2 = 2OB \times BC$; e dall'una e dall'altra parte dividendo per CB, avremo $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2}{CB} = 2OB$; cioè, se dal valore del quadrato $\overline{AC}^2$ levans' i valori de' quadri $\overline{CB}^2$, $\overline{AB}^2$, e che 'l residuo si divida pel valore del lato BC, il quoziente sarà 'l doppio del prolungamento OB: così la metà di detto quoziente sarà 'l valore del prolungamento.

E siccome nel triangolo rettangolo ABO abbiamo $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$, se d'amendue le parti si leva $\overline{OB}^2$, avremo $\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{AO}^2$; così dal valore del quadrato $\overline{AB}^2$ sottraendo 'l quadro del prolungamento OB, che puossi conoscere come s'è detto, il residuo sarà 'l quadrato della perpendicolare AO, e la radice di detto residuo sarà 'l valore della stessa.

177. PROBLEMA. *Divisa una retta* AB (Fig. 106. 107.) *in quante si voglia parti uguali, o disuguali, dividerne un' altra* AD *nella medesima ragione di* AB.

All'estremità A della retta AB faccio un'angolo DAB ad arbitrio, il cui lato AD io faccio uguale all'altra linea data AD; congiungo colla retta BD, l'estremità de'lati AB, AD e da'punti di divisione tiro delle parallele a BD, le quali seghino la retta AD nella medesima ragione di AB; imperocchè per A tirando una retta RS parallela a BD, le rette AB, AD comprese nello spazio pa-

parallelo RSBD sono segate nella stessa ragione dalle rette MG, ec. parallele alle parallele RS, BD (*N.* 153.).

178. COROLLARIO. *Se una linea* AD (Fig. 106. 107.) *è segata in parti proporzionali alle parti d' un' altra retta* AB, *ella non può dalla medesima banda esser divisa in altre parti, le quali sieno nella stessa ragione.*

Supponiamo, che AD (*Fig.* 106.) sia segata in C in due parti proporzionali alle due AM, MB della retta AB. Se vogliamo, che la linea AD possa esser divisa dalla stessa banda in altre due parti, le quali sieno pure nella medesima ragione, il punto di divisione sarà o infra A e C, come'l punto H, o di là da C, come 'l punto T. Ora nel primo caso egli è evidente, che la parte AH minor di AC sarà minore per rapporto alla parte rimanente HD maggior di CD, di quello sia la parte AC per rapporto alla rimanente CD, e in conseguenza sarà falso, che AH, HD : : AC, CD: parimente nel secondo caso, la parte AT maggior di AC sarà maggiore per rapporto alla parte TD minor di CD, di quello sia AC per rapporto a CD; e perciò egli sarà altresì falso, che AT. TD : : AC. CD. Dunque AD non può dalla stessa banda esser segata in altre due parti, le quali sieno in ragione delle due AC, CD.

Si potrebbe bensì dividere AD dall' altra banda in due parti, che fossero in ragione delle parti AC, CD, non dovendosi prendere che una parte DV eguale ad AC; e tosto l'altra parte AV sarà uguale a CD, e noi avremo DV, VA : : AC, CD.

Le stesse cose ancora si proverebbero, se la linea AD fosse divisa in un maggior numero di parti.

179. PROBLEMA. *Trovare una terza proporzionale a due date linee* AC, AB. (Fig. 108.).

Faccio un'angolo DAE; ad arbitrio sul lato AE porto la prima delle date linee da A in C; sull' altro io porto la seconda da A in B, e colla retta CB congiungo i punti C, B; sul primo lato AE porto parimente la seconda data linea da A in E; e dal punto E tirando la retta ED parallela a CB, e che seghi 'l lato AD in D, la retta AD sarà la terza proporzionale.

Imperocchè essendo ne' triangoli ACB, AED l'angolo A comune, gli angoli ACB, AED uguali, poichè son formati dalla stessa parte con le parallele BC, DE (*N.* 71.), e gli angoli ABC, ADE altresì uguali per la medesima ragione, sono simili. Dunque AC, AB : : AE, AD: ma AB = AE per la costruzione;

ne; onde AC, AB : : AB, AD; e per conseguenza AD è la terza proporzionale.

180. PROBLEMA. *Trovare una quarta proporzionale a tre date linee* AB, AC, AD (Fig. 109.).

Faccio un'angolo ad arbitrio DAE; sul primo lato DA porto la prima delle date linee AB da A in B, e sopra 'l secondo EA porto la seconda AC da A in C. Colla retta BC congiungo i punti B, C; e sul primo lato DA portando da A in D la terza linea data AD, pel punto D io tiro la retta DE parallela a BC, e che seghi l'altro lato in E; la retta AE sarà dunque la quarta proporzionale.

Imperocchè, simili essendo i triangoli ABC, ADE a cagione delle parallele CB, DE, abbiamo AB, AC : : AD, AE.

181. PROBLEMA. *Date le due prime linee d' una progressione Geometrica di linee, continuarla ad arbitrio.*

Si chiamino le due date linee *a*, *b*. Cerco una terza proporzionale a dette due linee, e la chiamo *c*; così *c* sarà il terzo termine della progressione; cerco una terza proporzionale alle due rette *b*, *c*, e chiamandola *d*, ella sarà 'l quarto termine della progressione, perciocchè avremo per la costruzione *a*, *b* : : *b*, *c*, e *b*, *c* : : *c*, *d*: onde *a*, *b* : : *b*, *c* : : *c*, *d*, ovvero : : *a*, *b*, *c*, *d*: e continuando nello stesso modo, troveremo quanti si voglia termini della progressione.

La maniera di ritrovare la somma d'una progressione Geometrica di linee si è la stessa di quella da noi insegnata nel Lib. I°. Cap. VIII.

182. PROBLEMA. *Fra due date linee* AB, BC (Fig. 110.) *ritrovare una media proporzionale.*

Alla maggiore sovrappongo la minore da B in C; prolungo la grandezza dalla parte di B, facendo BH uguale ad AC; dal punto A preso per centro, con un raggio uguale ad AB descrivo un' arco PR, e dal punto H preso altresì per centro, con un raggio uguale ad HC descrivo un'arco ST, che seghi l'arco PR in O, da cui a' punti C, B tiro le rette OC, OB; e ciascuna di esse sarà la media proporzionale cercata: il che io provo così.

Per la costruzione, AC = HB; dunque ad amendue le parti aggiungnendo CB, avremo AB = HC: così essendo stati gli archi PR, TS descritti coi raggi uguali AB, HC, i quali presi insieme sono maggiori di AH, detti due raggi si segheranno fuori della linea AH in un sol punto O dalla banda di O (*N.* 59.), e questo

punto

punto sarà equidistante dai termini A, H della linea AH; perciò, se dal punto O si tirasse una perpendicolare sopra AH, ella segherebbe AH in due parti uguali, a cagione dell'obblique uguali, o de' raggi OA, OH (*N.* 54.), cioè la segherebbe sul mezzo Q della parte CB, a motivo di AC = BH; il che fa AC + $\frac{1}{2}$CB = BH + $\frac{1}{2}$CB: così, equidistanti essendo i punti C, B dell'obblique OC, OB dal punto Q della perpendicolare, esse sono uguali (*N.* 53.), e 'l triangolo OCB è isoscele: ora, ABO è parimente isoscele, poichè AB è uguale ad AO, e l'uno degli angoli ABO sopra la base BO è uguale all'uno degli angoli OBC sopra la base CB del triangolo isoscele OCB; dunque 'l secondo angolo sopra la base del triangolo ABO equivale al secondo sopra la base del triangolo OBC, e per conseguenza il terzo angolo è uguale al terzo (*N.*97.), e i due triangoli ABO, OBC son simili; onde, paragonando i lati opposti ai medesimi angoli, troveremo, ch'i due lati AB, BO del triangolo ABO sono proporzionali ai due OB, BC del triangolo OBC, cioè AB, BO ∴ : BO, BC; e conseguentemente BO è media proporzionale fra le due date linee AB, BC.

Nel seguente Capitolo insegneremo un'altro metodo, onde fra due date linee ritrovare una media proporzionale.

183. DIFFINIZIONE. Due linee a, b diconsi *reciproche* a due altre c, d, quando l'una delle due prime a è all'una delle due ultime c, reciprocamente, come l'altra delle due ultime d è all'altra delle due prime b; ovvero, il ch' già è lo stesso, quando 'l prodotto delle due prime equivale a quello delle due ultime; imperocchè se abbiamo a, c : : d, b, avremo altresì $ab = cd$, facendo 'l prodotto dell'estreme, e delle medie.

In oltre una linea dicesi segata in due parti *reciproche* a quelle d'un'altra, quando 'l prodotto delle parti della prima equivale a quello delle parti dell'altra; ovvero quando l'una delle parti della prima linea è all'una di quelle della seconda, reciprocamente, come l'altra parte della seconda linea è all'altra parte della prima.

184. PROPOSIZIONE XLVII. *Se due rettangoli* ABCD, abcd (Fig. 111.) *sono uguali, ma che disuguali sieno le basi* AB, ab, *e l'altezze* AD, ad; *l'altezze* AD, ad *son reciproche alle basi* AB, ab.

Il rettangolo ABCD è uguale al prodotto AD × AB della sua base per la sua altezza, e 'l rettangolo *abcd* al prodotto $ad \times ab$; dunque per l'ugualità de' rettangoli noi abbiamo AD × AB = $ad \times ab$;

e quindi, facendo una proporzione, come s'è detto nel Lib.I°. Cap. VIII, avremo AD *ad* : : *ab* , AB ; cioè, l'altezze AD , *ad* son reciproche alle basi AB, *ab*.

185. COROLLARIO. *Puossi altresì aggiugnere, ch'in due rettangoli uguali l'altezza* AD *e la base* AB *del primo son reciproche all' altezza* ad , *e alla base* ab *del secondo ; poichè s' ha* AD × AB = ad × ab, *come si è richiesto* (*N.*183.) .

186. PROPOSIZIONE XLVIII. *Il rettangolo maggiore , che formar si possa da due parti, che compongono una linea , è quello , che formasi, quando dette parti sono fra loro uguali.*

Sia la linea CD (*Fig.* 112.) divisa per mezzo in O ; il rettangolo della parte DO per la parte OC è uguale al quadrato della metà DO: ora, se dividesi la stessa linea in due parti disuguali in E, il rettangolo delle parti disuguali DE, EC equivale al quadrato della metà DO, meno 'l quadrato della parte intercetta EO (*N.* 146.) ; e però il rettangolo delle due parti disuguali DE , EC è minore del rettangolo delle parti DO , OC ; e siccome lo stesso sempre avverrà, qualunque volta dividasi la retta DC in due parti disuguali, così ne segue , ch' il rettangolo delle parti uguali DO, OC è 'l maggiore, che formar si possa dalle due parti , che compongono DC.

187. PROBLEMA. *Segare una retta* AB (Fig. 112.) *in due parti reciproche alle due parti* DE, EC , *che compongono un' altra retta* DC.

Prendo una media proporzionale fra le due parti DE, EC della retta DC; sopra l'estremità B della retta BA alzo una perpendicolare BH, ch'io faccio uguale alla media proporzionale; dal punto H preso per centro, con un raggio uguale alla metà ZB della linea BA descrivo un' arco , il quale o seghi la retta BA in un punto S , o la tocchi in B senza segarla, ovvero nè la tocchi nè la seghi. Se l'arco sega la retta AB in S, sopra ZB porto la parte BS da Z in X, e le parti BX, XA della retta BA son le reciproche cercate: s'ei semplicemente la tocca, le due reciproche cercate saranno le due metà ZB , ZA della retta BA ; e se non la tocca, nè la sega, il Problema è impossibile . Diasi la pruova di tutti questi casi.

Primieramente, se l'arco sega BA in S, io tiro 'l raggio HS uguale per la costruzione a BZ ; rettangolo essendo il triangolo HBS, abbiamo $\overline{HB}^2 + \overline{BS}^2 = \overline{SH}^2$ (*N.* 171.) ; onde , toglien-
do

do da una parte $\overline{BS}^2$, avremo $\overline{HB}^2 = \overline{SH}^2 - \overline{BS}^2$: ora SH = BZ, e BS = ZX; dunque $\overline{SH}^2 = \overline{BZ}^2$, e $\overline{BS}^2 = \overline{ZX}^2$; e però $\overline{HB}^2 = \overline{SH}^2 - \overline{BS}^2 = \overline{BZ}^2 - \overline{ZX}^2$: ma divisa essendo la linea AB in due parti eguali in Z, e disuguali in X, abbiamo $BX \times XA = \overline{BZ}^2 - \overline{ZX}^2$ (*N* 146.); dunque $BX \times XA = \overline{HB}^2$: ora, essendo HB media proporzionale fra le parti DE, EC della retta DC, il suo quadrato $\overline{BH}^2$ è uguale al prodotto $DE \times EC$ dell' estreme; però $BX \times XA = DE \times EC$; ed in conseguenza le parti BX, XA della retta BA son reciproche alle parti DE, EC della retta DC (*N.* 183.).

Secondariamente, se l'arco tocca la linea BA, egli dee toccarla in B, cioè dee il suo raggio HS esser' uguale alla perpendicolare HB; imperocchè se fosse maggiore, chiaro si scorge, che quando giunto fosse detto raggio alla posizione HS ravvolgendosi intorno ad H, la sua estremità S caderebbe di là da B p. e. in S, e ch' in conseguenza l'arco segherebbe la linea AB, in vece di toccarla; essendo dunque in questo secondo caso uguale il raggio alla perpendicolare, il quadrato del raggio è altresì uguale alla perpendicolare BH: ora, il raggio è uguale a BZ, e 'l quadro di BZ equivale al rettangolo $BZ \times ZA$; onde $BZ \times ZA = \overline{HB}^2 = DE \times EC$; e conseguentemente le due metà della linea AB son reciproche alle parti BE, EC della linea DC.

Se finalmente l'arco non sega, nè tocca BA, il suo raggio è in conseguenza minore di HB, e 'l suo quadrato $\overline{BZ}^2$, o 'l rettangolo $BZ \times ZA$ è minore del quadrato HB, o del rettangolo $DE \times EC$: ma il rettangolo $BZ \times ZA$ è 'l maggiore di tutt' i rettangoli, che far si possano segando BA in due parti, e facendo il loro rettangolo (*N.* 186.); non si può adunque segar BA in due parti, il cui prodotto sia uguale al prodotto $DE \times EC$; e 'l Problema è impossibile.

188. COROLLARIO. *Se una linea* BA (Fig. 113.) *è segata in due parti* BX, XA *reciproche alle due parti* DE, EC, *non può detta linea dal medesimo lato segarsi in un' altro punto per rapporto al mezzo* Z *in altre due parti reciproche a* DE, EC.

Il punto, in cui vorebbesi segar questa linea, sarebbe o infra

B ed X, come il punto M, o infra X e'l centro Z, come'l punto m; nel primo caso avremo $BM \times MA = \overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2$, per essere AB segata in due parti uguali in Z, e disuguali in M; se dunque si suppone, che le parti BM, MA sieno reciproche alle due DE, EC, avremo $BM \times MA$, o $\overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2 = DE \times EC$: ora egli si suppone eziandio $BX \times XA = DE \times EC$, e $BX \times XA = \overline{BZ}^2 - \overline{XZ}^2$ (*N.* 146.); onde $\overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2 = \overline{BZ}^2, - \overline{XZ}^2$, il ch'è impossibile; poichè il quadrato $\overline{MZ}^2$, che togliesi dal quadro di BZ, è maggiore del quadro $\overline{XZ}^2$, che levasi dal medesimo quadro di BZ; ed in conseguenza i residui $\overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2$, e $\overline{BZ}^2 - \overline{XZ}^2$ non potrebbero esser' uguali: Si proverà parimente nel secondo caso che'l rettangolo $Bm \times mA$ non equivale al rettangolo $BX \times XA$, e per conseguente nè meno al rettangolo $DE \times EC$.

Ma se si pigliasse il punto di divisione di là da Z, ciò non sarebbe più impossibile; imperocchè, prendendo sopra AZ una parte AV uguale a BX, l'altra parte VB sarebbe uguale ad XA, e quindi s'avrebbe $AV \times VB = DE \times EC$.

189. DIFFINIZIONE. Se una retta è segata in due parti disuguali, talmente che la minore sia alla maggiore, come la maggiore è a tutta la linea, ella dicesi divisa in *Estrema*, e *Media ragione*. La maggiore appellasi *Mediana*.

190. PROBLEMA. *Data una linea* AB (Fig. 114.) *dividerla in estrema, e media ragione.*

Faccio 'l quadrato ABDE della data linea, e dal mezzo C di AB tiro la retta CD all'uno degli angoli opposti D. Prolungo AB in H, e facendo CH = CD, sopra BD porto BH da B in R; e la retta BD, uguale alla data retta AB, è divisa in estrema, e media ragione; e la parte BR è la sua mediana; il che io dimostro in questo modo.

Nel triangolo rettangolo CDB abbiamo $\overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2$ (*N.* 171.); e poichè la linea AB è divisa in due parti uguali in C, e perchè le è aggiunta BH, abbiamo $AH \times BH = \overline{CH}^2 - \overline{BC}^2$ (*N.* 148.), ovvero $AH \times BH + \overline{BC}^2 = \overline{CH}^2$, aggiugnendo $\overline{BC}^2$ ad ambe le parti: ora, per la costruzione, CH = CD; dunque

que $\overline{CH}^2 = \overline{CD}^2$, ed in conseguenza $\overline{DB}^2 + \overline{CB}^2 = AH \times BH + \overline{CB}^2$; e d'ambe le parti levando $\overline{CB}^2$, avremo $\overline{DB}^2 = AH \times BH$; cioè, facendo 'l rettangolo AHMN di $HA \times BH$, egli sarà uguale al quadrato ABDE; e però, levando il rettangolo comune ABRN, avremo 'l rettangolo NRDE uguale al quadrato BRMH, o $DR \times DE = \overline{RB}^2$: ma per la costruzione $DE = DB$; dunque $DR \times DB = \overline{RB}^2$, e quindi DR. RB : : RB. DB.

191. COROLLARIO I°. *Essendo una linea* DB, *o* AB *divisa in estrema e media ragione, se vi s'aggiugne la mediana* RB, *o* BH, *s'avrà un'intera linea* AH, *la quale sarà altresì divisa in estrema e media ragione, e la cui mediana sarà la linea* AB.

Per la precedente Proposizione, il quadrato ABCDE è uguale al rettangolo AHMN, cioè $\overline{AB}^2 = AH \times BH$; dunque HB. AB : : AB. AH.

192. COROLLARIO II. *Essendo una linea* AH *divisa in estrema e media ragione, se sopra la sua mediana* AB, *o* BD *da* B *in* R *portasi la parte minore* BH, *detta mediana sarà divisa in* R *in estrema e media ragione*. La dimostrazione s'è veduta sopra (N. 190.).

193. COROLLARIO III. *Essendo una linea* AH *divisa in estrema e media ragione, se alla parte minore* BH *s'aggiugne la metà* CB *della mediana, il quadrato della somma* CH *è uguale a cinque quadrati della metà* CB.

Per la costruzione (N. 190.), la retta CD è uguale a CH, ed in conseguenza $\overline{CD}^2 = \overline{CH}^2$. Ora, a cagione del triangolo rettangolo CBD, abbiamo $\overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2$, e poichè DB è doppio di CB, abbiam $\overline{DB}^2 = 4\overline{CB}^2$ (N. 143.); dunque $\overline{CD}^2 = 4\overline{CB}^2 + \overline{CB}^2 = 5\overline{CB}^2$, e quindi $\overline{CH}^2 = 5\overline{CB}^2$.

194. COROLLARIO IV. *Se una linea* AH *è divisa in estrema e media ragione, la linea minore, la mediana e l'intera sono fra loro incommensurabili.*

Pel Corollario precedente $\overline{CH}^2 = 5\overline{CB}^2$: dunque $\overline{CH}^2 . \overline{CB}^2 :: 5 . 1$; e da ogni termine estraendo la radice quadra, avremo CH . CB :: $\sqrt{5} . 1$; perciò dividendo, avremo CH — CB . CB :: $\sqrt{5} - 1 . 1$, cioè

cioè BH . CB : : $\sqrt{5} - 1 . 1$; e facendo 'l doppio de' conseguenti, s'avrà BH . AB : : $\sqrt{5} - 1 . 2$: ma il termine $\sqrt{5} - 1$ è incommensurabile al termine 2, per non potersi esprimere il lor rapporto; onde non puossi esprimere il rapporto della linea minore BH alla mediana AB , e dette due linee sono incommensurabili.

Imperocchè BH . AB : : $\sqrt{5} - 1 . 2$; dunque *componendo* avremo BH + AB. AB : : $\sqrt{5} - 1 + 2 . 2$; ovvero AH. AB : : $\sqrt{5} + 1 . 2$: ma i due ultimi termini sono incommensurabili ; dunque incommensurabili sono anche i due primi AH, AB, cioè l'intera linea, e la mediana.

Così pure, poichè BH. AB : : $\sqrt{5} - 1 . 2$; dunque componendo in altro modo, avremo BH . BH + AB :: $\sqrt{5} - 1 . \sqrt{5} - 1 + 2$; ovvero, BH. AH : : $\sqrt{5} - 1 . \sqrt{5} + 1$: ma i due ultimi termini sono incommensurabili ; dunque incommensurabili sono anche la linea AH, e la minore BH.

195. COROLLARIO V. *Se due linee* AH, BD (Fig. 114.) *son divise ciascuna in estrema e media ragione , le lor parti saranno proporzionali.*

Pel Corollario precedente, la parte minore BH è alla mediana AB , come $\sqrt{5} - 1$ è a 2 , e ciò dicasi di tutte le linee divise in estrema, e media ragione; dunque nella linea BD avremo parimente DR . RB : : $\sqrt{5} - 1 . 2$; e quindi BH . AB : : DR. RB.

196. PROBLEMA. *Date due rette uguali* AB, BC (Fig.115.) *ritrovare la base, che conviene dar loro per costruire un triangolo isoscele* ABC, *di cui ciascun angolo della base sia doppio dell' angolo* B *al vertice* .

Divido l'una delle date rette AB in estrema e media ragione , e prendendo una retta AC uguale alla sua mediana BR, con AC e colle due rette uguali AB, BC descrivo un triangolo ABC , che sarà il triangolo cercato.

A fine di darne la dimostrazione , tiro la retta RC ; e poichè AB è divisa in estrema e media ragione , ho AR . RB : : RB . AB (*N.* 189.) : ma RB = AC ; dunque AR . AC : : AC . AB : così i due lati AR , AC del triangolo ACR sono proporzionali ai due AC, AB del triangolo ABC ; e siccome l' angolo contenuto A è lo stesso in entrambi , i due triangoli ACR, ABC son simili (*N.* 161.) , ed in conseguenza il triangolo ACR è iso-

isoscele, non meno ch'il triangolo ABC; il che rende altresì isoscele il triangolo RCB, a cagione di AC = CR = RB: ora, l'angolo ARC esterno al triangolo RCB è uguale ai due interni opposti B, BCR (*N.* 97.), o al doppio dell'angolo B, poichè uguali sono i due angoli B e BCR del triangolo isoscele RCB; e l'angolo ARC è uguale all'angolo RAC, poichè il triangolo ACR è isoscele; dunque nel triangolo isoscele ABC l'angolo A sopra la base è doppio dell'angolo B al vertice.

197. PROBLEMA, *Data una linea* AC (Fig. 116.) *costruirvi sopra un triangolo isoscele, di cui ciascun' angolo sopra la base sia doppio dell'angolo al vertice.*

Divido la retta AC in estrema, e media ragione in S; aggiungo la mediana AS alla linea AC da A in N, e colla retta AC ed altre due rette AB, BC, uguali ciascuna alla retta CN, costruisco un triangolo isoscele, ch'è il triangolo cercato.

Imperocchè, uguale essendo la retta AN alla mediana di AC divisa in estrema e media ragione, anche la retta CN è divisa in estrema e media ragione in A (*N.* 191.), e la sua mediana si è AC: ora, per la costruzione, AB = CN; se dunque si sega AB in estrema e media ragione in R, la sua mediana BH sarà uguale alla mediana AC: così noi abbiamo un triangolo isoscele ABC, la cui base AC è la mediana dell'uno de' suoi lati; e quindi mostreremo come nel precedente Problema, che ciascun' angolo sopra la base è doppio dell'angolo al vertice.

198. COROLLARIO I°. *In ogni triangolo isoscele* ABC (Fig. 115. 116.), *di cui ciascun' angolo sopra la base è doppio di quello al vertice, se segasi l' uno degli angoli della base in due parti uguali con una retta* CR, *che sega il lato opposto in* R; *detto lato sarà diviso in estrema, e media ragione.*

Quest' è una manifesta conseguenza di quanto s'è detto sopra (*N.* 196.).

199. COROLLARIO II. *In ogni triangolo* ABC (Fig. 115. 116.), *di cui ciascun' angolo sopra la base è doppio di quello al vertice, l' angolo al vertice è di 36 gradi, e ciascun' angolo sopra la base è di 72.*

Divido ciascun' angolo della base in due parti eguali; così i tre angoli del triangolo equivagliono insieme a cinque angoli uguali a quello del vertice: ora, i tre angoli del triangolo equivagliono insieme a due retti, od a 180 gradi (*N.* 97.); perciò i cinque angoli uguali vagliono parimente 180 gradi, e per conseguenza

ognuno

ognuno di loro ne vale 36, ch'è il quinto di 180. L'angolo al vertice vale dunque 36 gradi, e ciascun'angolo sopra la base, poichè egli è 'l doppio di quello al vertice, ne vale 72.

200. PROPOSIZIONE XLIX. *Se più linee parallele* AB, CD, FH, ec. (Fig.117.) *sono segate da più linee* AH, MN, RS, BE, ec. *che si segano in uno stesso punto, dette parallele son segate nella medesima ragione.*

Si paragonino le parallele AB, CD, che sono dalla stessa banda rispetto 'l punto O; i triangoli AOM, COT son simili, a motivo dell' angolo comune AOM, degli angoli OAM, OCT formati dalle parallele con AO fra loro uguali, e degli angoli OMA, OTC per la stessa ragione uguali fra loro; così abbiamo AM, CT : : OM, OT: ora, simili essendo pure i triangoli MOR, TOV, ci danno MR. TV : : OM. OT; dunque AM. CT : : MR. TV: ma gli stessi triangoli MOR, TOV ci danno MR. TV : : OR. OV, e a cagione de' triangoli simili ROB, VOD abbiamo RB, VD : : OR, OV; e però MR. TV : : RB. VD: così, uguale essendo la ragione delle parti AM, CT delle parallele AB, CD alla ragione delle parti MR, TV, ed essendo questa uguale alla ragione delle parti RB, VD, ne segue, che le parallele AB, CD son segate nella medesima ragione.

Or si paragonino le parallele AB, EH, che son da diverse bande rispetto 'l punto O; i triangoli AOM, HON sono simili a motivo dell' angolo AOM uguale all' angolo HOM oppostogli al vertice, dell'angolo OAM uguale al suo alterno OHN, e dell'angolo OMA uguale al suo alterno ONH; dunque AM. NH : : MO. NO: ora, simili essendo per le stesse ragioni i triangoli MOR, SON, ci danno MR. SN : : MO. NO; onde AM. NH : : MR. SN: ma gli stessi triangoli MOR, SON danno pure MR. SN : RO. SO, e a cagione de'triangoli simili ROB, SOE abbiamo RB. SE : : RO. SO; dunque MR. SN : : RB. SE : così, uguale essendo la ragione delle parti AM, HN delle parallele AB, EH alla ragione delle parti MR, SN, e questa uguale alla ragione delle parti RB, SE, egli è evidente, che le due parallele AB, EH son segate nella medesima ragione; e così dell' altre.

201 PROBLEMA. *Data una retta* AB (*Fig.* 118.) *segarla in quante si voglia parti uguali.*

Prendo una retta indefinita NX, sopra cui con un' apertura di compasso ad arbitrio porto tante parti uguali, quante se ne ricercano per la linea AB, p. e. quattro, NR, RS, ST, TX.

Sopra

Sopra XN faccio un triangolo equilatero NVX; e dal punto V tiro delle rette ai punti di divisione R, S, T. Quindi col compasso piglio la grandezza della linea AB, e la porto sopra i due lati VX, VN prolungati, se sia d'uopo, da V in H, e da V in L; congiungo i punti H, L colla retta HL; e prolungando, se sia d'uopo, le rette VR, VT, TV, fintantocchè seghino la retta HL, sarà essa uguale alla data retta, e divisa nel numero di parti ricercate.

Poichè, a motivo delle basi parallele XN, HL, simili sono i triangoli VXN, VHL: ora, il triangolo VXN è equilatero; dunque lo è altresì il triangolo VHL, ed in conseguenza HL=HV: ma VH è uguale per la costruzione ad AB; onde HL lo è altresì ad AB. Ora, per la precedente Proposizione, le rette XN, HL parallele fra le linee, che partono dallo stesso punto V, son divise nella medesima ragione; ed XN è stata divisa in quattro parti uguali; perciò HL è parimente divisa in quattro parti uguali.

Questa pratica è per dir vero ingegnosissima; ma siccome, dopo divisa HL in parti uguali, convien portare dette parti sopra la retta AB, la qual cosa riesce assai imbarazzante, spezialmente se le parti uguali sono assai picciole, così io vorrei piuttosto servirmi della pratica seguente.

Debbasi dunque dividere la linea AB (*Fig.* 119.) in quattro parti uguali; faccio in A un' angolo qualunque BAX, e dal punto B tiro una parallela al lato AX; prendo un' apertura di compasso ad arbitrio, e la porto quattro volte sul lato indefinito AX da A in M, da M in N, ec. Porto ancora quattro volte la stessa apertura di compasso sulla parallela indefinita BZ da B in S, da S in T, ec. Congiungo i punti di divisione delle linee AC, BD colle rette CB, RS, NT, MV, AD, e queste linee segano la retta AB in quattro parti uguali.

Imperocchè, essendo AB inclinata fra le parallele AC, BD, gli angoli alterni BAC, ABD sono uguali: ora, i lati AC, AB del triangolo CAB sono uguali ciascuno a ciascuno a' lati BD, BA del triangolo ABD; dunque, a motivo degli angoli contenuti uguali, questi due triangoli sono perfettamente uguali (*N.*100.), e l'angolo ABC equivale all'angolo BAD: ma questi angoli sono alterni fra le rette BC, AD; ond' esse sono fra loro parallele (*N.* 73.). Ora, le rette AC, BD inclinate nello spazio parallelo BCAD son divise proporzionalmente; dunque le linee RS, NT, MV, che le segano, son parallele alle parallele BC, AD

 (*N.*157).

(*N.* 157.), ed in conseguenza le stesse linee RS, NT, ec. segano l' inclinata AB nella medesima ragione (*N.* 153.), cioè in quattro parti uguali.

202. DIFFINIZIONE. Se una retta AB (*Fig.* 120.) è divisa in tre parti AC, CD, DB, tal che la prima AC sia alla seconda CD, come tutta la linea AB è alla terza DB, essa dicesi divisa *Armonicamente*, ovvero *in tre parti Armonicamente*.

E conviene avvertire, che quando una linea è divisa in tal modo, la terza parte DB è alla seconda CD, come l' intera linea è alla prima AC.

Imperocchè, per la diffinizione, abbiamo AC, CD::AB, DB; facendo dunque il prodotto degli estremi e de' medj, avremo AC × DB = CD × AB; e quindi si deduce questa proporzione DB. CD : : AB. AC: così può dirsi, che *quando una linea è divisa armonicamente in tre parti, ciascuna parte estrema è alla media, come l' intera linea è all' altra estrema*.

203. COROLLARIO. *Quando una linea* A, B (Fig. 120.) *è divisa armonicamente, la parte media* CD *è sempre minore di ciascuna dell' estreme* AC, DB.

Imperocchè, essendo AC, CD : : AB, DB, ed essendo AB maggior di DB, AC dee altresì esser maggiore di CD. Parimente, essendo DB, CD : : AB, AC, ed AB essendo maggior di AC, dee altresì DB esser maggiore di CD.

204. PROBLEMA. *Dividere una linea retta* AB (Fig.120.) *in tre parti armonicamente*.

Fuori della linea AB e de' suoi prolungamenti prendo qualsivoglia punto R, da cui all' estremità A, B tiro le rette RA, RB. Sego l' una, o l' altra di queste rette in qualsivoglia punto P, e da esso punto sopra AB tiro la retta BD parallela all' altra linea RA. Prolungo BD di là da D, facendo DS = PD; dal punto S ad R conduco la retta SR, che seghi AB in C, e la linea AB è divisa armonicamente ne' punti C, D. Il che io così dimostro.

A motivo delle parallele AR, SP, che formano gli angoli alterni uguali, e dell' angolo ACR, uguale all' angolo SCD che gli è opposto al vertice, simili sono i triangoli ACR, SCD; onde AC, CD : : AR, SD: ora, simili essendo i triangoli ARB, DPB a cagione delle basi parallele AR, DB, ci danno AB, DB : : AR, DP; ovvero AB, DB : : AR, SD, poichè per la costruzione DP = SD: dunque AC, CD : : AB, DB; e però la linea AB è divisa armonicamente.

205. CO-

205. COROLLARIO I°. *Quando proponesi di dividere una linea armonicamente senza determinare alcuna delle sue parti, il Problema è indeterminato, e puossi risolvere in infiniti modi.*

Per lo precedente Problema, il punto R può prendersi dovunque più ci piace, e puossi altresì prendere ad arbitrio il punto P sopra l'una, o l'altra delle linee RA, RB: ora, tutto questo può variare in infiniti modi, e dar sulla linea AB infiniti punti C, D. Dunque, ec.

206. COROLLARIO II. *Ma se colla linea* AB *è determinata alcuna delle sue parti; ovvero, se date due delle sue parti l'intera linea è ignota, tutto è determinato, e'l Problema non può risolversi ch'in un sol modo.*

Primieramente, se data colla linea AB l'una, o l'altra delle sue parti estreme, p. e. la parte AC, ritrovar si voglia il punto D, in cui esser dee segato il residuo CB della linea; già è noto, ch'aver deesi AC, CD : : AB, DB, o alternando AC, AB CD, DB; perciò trattasi soltanto di dividere CB in due parti CD, DB proporzionali alla parte AC, e all'intera linea AB. Ora AB non può esser segata dallo stesso lato in altre due parti proporzionali ad AC, AB (*N.* 178.); onde'l Problema non può esser risoluto ch'in un sol modo.

Secondariamente, se data la linea AB dicesi, che la parte media è uguale ad una data retta; già si è noto, ch'aver deesi AC, CD : : AB, DB; il che ci dà AC × DB = CD × AB: così le due estreme, ch'in particolare noi non conosciamo, esser debbono reciproche all'intera linea AB, e alla sua parte CD (*N.* 183.), il cui valore ci è noto; però dalla linea AB levando'l valore della sua parte, il residuo sarà la somma delle due estreme AC, DB; e alla linea AB aggiugnendo una retta AM, uguale al valore della parte media, la somma sarà'l valore dell'intera linea, e della sua parte CD.

Dividendo dunque la somma dell'estreme AC × DB in due parti reciproche alle due della somma MB, dette due parti saranno i valori dell'estreme; e siccome la linea uguale alla somma AC + DB non può in due diversi modi esser segata in due tali parti reciproche, di maniera che le parti d'una seconda divisione, che volesse farsi, differissero dalle due della prima (*N.* 188.); ne segue, ch'il Problema ha una sola risoluzione.

In terzo luogo, se date sono le due parti conseguenti AC, CD ritrovar si voglia l'intera linea, già è noto, ch'aver deesi AC, CD : : AB, DB; dunque dividendo, avremo AC — CD,

CD : : AB — DB, DB, cioè AC — CD, CD : : AD, DB; ed in conseguenza non si tratterà che di cercare una quarta proporzionale alla differenza AC — CD delle date linee AC, CD alla linea CD, e alla somma AD delle due; e siccome non si possono prender due quarte proporzionali differenti a tre grandezze determinate, così'l Problema è determinato.

Finalmente, se date le due estreme AC, BD (*Fig.* 121.) ritrovar si voglia la parte media, è già noto pel caso precedente, che debbono le due estreme esser reciproche alla parte media, e all' intera linea; cioè, ch'il prodotto AC × BD esser dee uguale al prodotto della parte media per l' intera linea (*N.* 183.). Così io tiro una linea MR uguale alla somma dell'estreme, facendo MN = AC, ed NR = BD; e dividendo MR in due parti eguali in O, avremo $MN \times NR = \overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$ (*N.* 146.). Non si ha dunque ch'aggiugnere alla linea MR una linea MV tale, ch' il rettangolo dell' aggiunta MV per l' intera VR sia uguale al rettangolo MN × NR, e quindi far vedere, che quest' aggiunta è la parte media, e ch' altre esser non ve ne possono. Ora già si sa, che dobbiamo avere $VM \times VR = \overline{VO}^2 - \overline{MO}^2$ (*N.* 148.): e'convien dunque, che noi abbiamo altresì $\overline{VO}^2 - \overline{MO}^2 = MN \times NR$; e però $\overline{VO}^2 - \overline{MO}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$; e ad ambe le parti aggiugnendo $\overline{MO}^2$, avremo $\overline{VO}^2 = 2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$; a fin dunque di ritrovare questo quadro $\overline{VO}^2$, ed in conseguenza la sua radice VO, sopra'l mezzo C della linea MR alzo una perpendicolare OX, ch' io faccio uguale ad MO ed OR, e tiro la retta RX, il che mi dà un triangolo rettangolo isoscele, in cui abbiamo $\overline{RX}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OX}^2$ (*N.* 171.); e a cagione di OR = OX = MO abbiamo $\overline{RX}^2 = 2\overline{MO}^2$. Preso per centro il punto N, con un'apertura di compasso uguale ad RX descrivo un'arco, che seghi in Z la perpendicolare OX prolungata, e tirando la retta NZ, uguale per conseguenza ad RZ, abbiamo un'altro triangolo rettangolo NZO, che ci dà $\overline{ZN}^2$, od $\overline{RX}^2 = \overline{ZO}^2 + \overline{NO}^2$ (*N.* 171.): ma $\overline{RX}^2 = 2\overline{MO}^2$; onde $2\overline{MO}^2 = \overline{ZO}^2 + \overline{NO}^2$, e d'ambe le parti togliendo $\overline{NO}^2$, abbiamo $2\overline{MO}^2 - NO$

— $\overline{NO}^2 = \overline{ZO}^2$: ma $2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2 = \overline{VO}^2$, come s'è veduto; dunque $\overline{VO}^2 = \overline{ZO}^2$, ed VO = ZO: così, prolungando OM di là da M, e portando ZO da O in V, avremo la retta VO, da cui levando MO, il residuo sarà la particella cercata; onde, facendo una linea uguale alle tre VM, AC, BD, e di cui sia VM la parte media, essa sarà la retta divisa armonicamente, e ch'avrà per estreme le due date AC, BD; e 'l Problema non può risolversi che in un sol modo. Imperocchè, se VM divenisse o maggiore, o minore, il rettangolo di VM per l'intera linea sarebbe maggiore, o minor del rettangolo AC × BD, o $2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$.

207. COROLLARIO III. Quindi ne segue, che *se due linee uguali divise armonicamente hanno una dell'estreme uguale ad una dell'estreme, o la parte media uguale alla parte media, l'altre due parti sono uguali ciascheduna a ciascheduna all'altre due; e che se le due estreme d'una linea sono uguali alle due estreme di un' altra, ovvero se un'estrema e la parte media sono uguali ad un'estrema e alla parte media, le due linee sono uguali.*

Imperocchè altrimenti 'l Problema non sarebbe determinato in tutti que'casi, di cui abbiam parlato sopra (*N.* 206.); il ch'è impossibile.

208. COROLLARIO IV. *Se da un punto* R (Fig. 122.) *preso fuori d'una linea* AB, *divisa armonicamente ne'punti* C, D, *tiransi quattro linee indefinite, le quali passino per i punti* A, C, D, B *di* AB; *qualunque linea* PS, HZ, ec. *che segherà tre di queste linee, e che sarà parallela alla quarta, sarà segata in due parti uguali fra le linee da essa segate.*

Dal punto D tiro PS, la quale sia parallela ad AR, e seghi le tre linee RZ, RT, RV; i triangoli ARC, DSC son simili, a motivo degli angoli alterni formati dalle parallele AR, PS, e dell' angolo ACR, uguale all'angolo SCD oppostogli al vertice; dunque AR, SD : : AC, CD: ora, simili essendo i triangoli ARB, DPB a motivo delle basi parallele AR, DP, ci danno AR, DP : : AB, DB; e per ipotesi abbiamo AC, CD : : AB, DB: dunque le ragioni AR, SD, e AR, DP, uguali alle due precedenti, sono tra loro uguali, e noi abbiamo AR, SD : : AR, DP, cioè SD = DP; a cagione degli antecedenti uguali AR, AR: così SP è divisa per mezzo fra le tre linee RZ, RT, RV; ma tutte le rette HZ, ec. tirate, fra queste tre linee, parallele ad

RA

RA, o PS sono segate nella medesima ragione di PS (*N*.200.) ; ond' esse son segate in due parti uguali.

Lo stesso potrebbesi agevolmente provare, se la linea PS (*Fig.* 123.) fosse stata dal punto G tirata, infra le tre RX, RZ, RT, parallela ad RV; imperocchè, a motivo de' triangoli simili CSD, RDB, s'avrebbe RB, CS : : DB, DC, e i triangoli simili ARB, APG ci darebbono RB, PC :: AB, AC : ma poichè la linea AB è divisa armonicamente, avrebbesi AB, AC : : DB, DC; dunque egli s'avrebbe altresì RB, PC : : RB, CS, e però PC = CS. Ma tutte le linee HT, ec. parallele ad AV, o a PS, son dalle rette RX, RZ, RT segate nella medesima ragione; quindi è ch' esse son parimente segate in due parti eguali.

209. COROLLARIO V. *Se quattro linee, che partono da uno stesso punto* R (Fig. 122. 123.), *son talmente disposte, che qualunque retta, che ne sega tre, e ch' è parallela alla quarta, sia divisa per mezzo fra le tre linee, che le sega; io dico, che qualunque retta, la quale dividerà le quattro in una volta in qualsivoglia posizione sarà divisa armonicamente infra le quattro linee.*

Da qualsivoglia punto A della linea RX (*Fig.* 122.) tiro una retta AB fra le quattro RX, RZ, RT, RV; e poichè si suppone, che qualunque linea HZ parallela ad RX, e compresa fra l' altre tre, sia divisa in due parti uguali, tiro dal punto D la retta PS parallela ad RX; ed in conseguenza s' avrà SD = DP: ora, i triangoli simili ARC, SCD ci danno AR, SD : : AC, CD, e a cagione de' triangoli simili ARB, DPB s' avrà AR, PD, od SD : : AB, DB; dunque AC, CD : : AB, BD, cioè AB sarà divisa armonicamente.

E lo stesso avverrebbe, se dicessimo, che qualunque linea PS (*Fig.* 123.) parallela ad RV, e compresa fra l' altre tre, fosse divisa in due parti uguali.

210. COROLLARIO VI. *Se quattro linee* RX, RZ, RT, RV (Fig. 124), *che partono da uno stesso punto* R, *son talmente disposte, che qualunque retta* PT *compresa fra tre di esse linee, e parallela alla quarta, sia divisa per mezzo, ovvero, il ch' è già lo stesso, che qualunque linea* AB *compresa infra le quattro sia divisa armonicamente; io dico, che prolungate queste quattro rette di là da* R, *ciò che darà otto linee* RX, RZ, RT, RV, RI, RL, RS, RQ, *sempre n' avverrà: che ciascuna linea, da cui saranno segate quattro di esse, sarà divisa armonicamente, e che ciascuna linea com-*

compresa fra tre di queste linee, e parallela ad una quarta, sarà divisa in due parti uguali.

1°. Egli è evidente, che se fra i quattro prolungamenti delle quattro linee tiro la retta MF parallela ad AB, ella sarà divisa nella medesima ragione di AB (*N.* 200.), ed in conseguenza armonicamente; e siccome quindi ne segue, che qualunque linea parallela ad uno di questi prolungamenti, e compresa fra l' altre tre, sarà divisa in due parti uguali (*N.* 208.); ne risulta altresì, che qualunque linea compresa fra le quattro in qualsivoglia posizione sarà divisa armonicamente (*N.* 209.).

2°. Giacchè, per ipotesi, le quattro RX, RZ, RT, RV dividono armonicanicamente AB, e poichè così qualunque linea compresa fra le tre RZ, RT ed RV, e parallela ad RA, o RQ, è segata per mezzo; ne segue, che le quattro RZ, RT, RV, RQ son disposte come si richiede, purchè ciascuna retta compresa infra le quattro sia divisa armonicamente (*N.* 209.); e però ciascuna linea contenuta fra le tre RT, RV, RQ, e paralella alla quarta RZ, od RS, sarà segata in due parti uguali (*N.* 208.); e le stesse cose si proveranno in somigliante guisa rispetto alle quattro linee RT, RZ, RX, RI.

3°. Giacchè ciascuna linea, che sega le tre RT, RV, RQ, e ch' è parallela alla quarta RS, od RZ, è divisa per mezzo, qualunque linea, che sega le quattro RT, RV, RQ, RS, è divisa armonicamente (*N.* 209.); ed in conseguenza ciascuna linea, che segherà le tre RV, RQ, RS, e che sarà parallela alla quarta RT, sarà divisa per mezzo; e lo stesso si proverà rispetto alle quattro linee RZ, RX, RI, RL.

Alla fine, perchè ciascuna linea compresa fra le tre RV, RQ, RS, e parallela alla quarta RT, od RL, è divisa in due parti uguali, qualsivoglia retta tirata infra le quattro RV, RQ, RS, RL dee esser divisa armonicamente (*N.* 209.); donde ne segue, che qualunque linea compresa fra le tre RQ, RS, RL, e parallela alla quarta RV, è divisa per mezzo (*N.* 208.); e lo stesso si proverà rispetto alle quattro RX, RI, RL, RS. Dunque, ec.

211. PROPOSIZIONE L. *Se due rette divise armonicamente hanno un punto comune, cioè o l' uno dei due estremi, o l' uno de' due medj; le linee, che congiugneranno gli altri punti di divisione, o saran tra loro parallele, o andranno a terminare in un medesimo punto.*

Sieno

Sieno le due rette AB, AR (*Fig.* 125. 127.) entrambe divise armonicamente, ed abbiano comune il punto estremo A; congiungo li punti medj colle rette CE, DH, e queste rette o saranno tra loro parallele, o no; se lo sono (*Fig.* 125.), congiungo gli altri punti B, R colla retta BR, e dico, ch'essa è parallela all'altre due; poichè, se vogliamo che non lo sia, pel punto B tiro una retta parallela all'altre CE, DH, la quale segherà AR prolungata, se sia d'uopo, in un punto S differente da R. Ora, essendo 'l triangolo ASB segato dalle rette CE, DH parallelle al lato BS, gli altri suoi lati AB, AS saran segati nella medesima ragione (*N.* 158.); ed in conseguenza il lato AS sarà diviso armonicamente, a motivo del lato AB diviso pure armonicamente: così noi avremo due rette disuguali AR, AS divise armonicamente, e che avranno non ostante due parti comuni AE, EH; il ch'è impossibile (*N.* 207.). Dunque, ec.

Se le rette CE, DH (*Fig.* 127.) non sono parallele, prolungate si segheranno in qualche punto O; e dico, che la retta BR prolungata passerà per detto punto; imperocchè, se non vogliamo che ciò sia, dal punto O tiro la retta OA, ed un'altra ne tiro al punto B, la quale conseguentemente segherà AR prolungata, se sia d'uopo, in un'altro punto S: così, poichè AS sarà compresa fra quattro rette OA, OC, OD, OSB, che dividono AB armonicamente, sarà AS divisa armonicamente come queste quattro linee (*N.* 208.); ed in conseguenza avremo due rette linee differenti AS, AR divise armonicamente, e che avranno nondimeno due parti comuni AE, EH, il ch'è impossibile (*N.* 207.); egli è dunque impossibile, che la linea BR prolungata non passi pel punto O, in cui vanno a segarsi l'altre linee CE, DH prolungate.

Nello stesso modo si proverà, che se due rette AB, ER (*Fig.* 126. 128.) divise armonicamente si segano in uno de' punti medj C; le linee tirate da' loro punti di divisione o saranno tra loro parallele (*Fig.* 126.), o si segheranno tutte in un medesimo punto O (*Fig.* 128.).

212. AVVERTIMENTO. Le proprietà della linea divisa armonicamente sono di massimo giovamento per l'intelligenza delle Sezioni Coniche, e per facilitare lo studio di queste curve, come vedremo in seguito.

213. PROPOSIZIONE LI. *Se più rette linee sono in Progressione Geometrica continua, le loro differenze son nella medesima ragione di dette linee.*

Sie-

Sieno le tre linee AB, AC, AD (*Fig.* 129.) in proporzione continua Geometrica, le lor differenze saranno BC, CD: ora, abbiamo a dimostrare, che BC, CD :: AB, AC; perciò, siccome il quadrato della media AC è uguale al prodotto, o rettangolo delle due estreme AB, AD, se faccio'l quadro AHMC della media AC, e 'l rettangolo ARSB dell'estreme AB, AD, il quadrato AHMC sarà uguale al rettangolo ARSB; e d'amendue le parti sottraendo'l rettangolo comune AHPB, i rettangoli rimanenti BCMP, PHRS saranno ancora uguali; e però reciprochi saranno i loro lati (*N.* 184.), ed avremo PM, PS :: PH, PB: ora, a cagione delle parallele AH, BP, CM, e delle parallele AB, HP, abbiamo PM = BC, ed HP = AB; e a motivo di AR o BS = AD, e di AH o BP = AC, abbiamo PS = CD; ponendo dunque questi valori di PM, PS, PH e PB, avremo CB, CD :: AB, AC; il che doveasi dimostrare.

Lo stesso ancora si proverebbe, se vi fossero più di tre linee; imperocchè supponendo, che quattro linee *a*, *b*, *c*, *d* fossero in proporzione continua, le differenze delle tre prime sarebbono fra loro come *a* a *b*: ora, essendo altresì in progressione le tre ultime *b*, *c*, *d*, le lor differenze sarebbero come *b* a *c*; ed in conseguenza elle sarebbono ancora come *a* a *b*; e così successivamente.

214. PROBLEMA. *Fra due date linee ritrovare quante si voglia medie proporzionali Geometriche.*

Colla sola Geometria ordinaria, cioè colla regola e col compasso non fu ancora risoluto questo Problema in tutti li suoi casi: vero è, che si potrebbe risolvere colla Geometria composta; ma egli è tanto difficile eseguire ciò ch'ella c'insegna, che questa scoperta si può dire una mirabile speculazione, da cui nulla si può sperare nella pratica. La maggior parte degli Autori si ristringono alle sole due medie proporzionali fra due date linee, come più necessarie a sapersi nella Geometria, e ci han somministrati più metodi, ma tutti incerti; però io credo, che la migliore e più spedita sia 'l servirsi del Compasso di Proporzione, come in altro luogo insegneremo.

Quando infra due date linee s'avranno a cercare tre medie proporzionali, o 7, o 15, o 31, e così di seguito; si risolveranno gli altri casi di questo Problema, facendo sempre'l doppio, ed aggiugnendo l'unità.

Imperciocchè, affine di trovare fra due linee *a*, *b* tre medie proporzionali, cerchisi prima fra dette due linee una media proporzionale,

la quale chiamisi x, e s' avrà a, x : : x, b; quindi si cerchi una media proporzionale z infra a ed x, ed un' altra y fra x e b; e s' avrà a, z : : z, x : : x, y : : y, b : il che io provo in questo modo:

Per essere a, z : : z, x, il quadrato della prima a è a quel della seconda z, come la prima a è alla terza x, cioè aa, zz : : a, x, come s' è detto (L. I°. *N.* 327.); così pure, per essere x, y :: y, b, abbiamo xx, yy::x, b: ora a, x :: x, b; dunque xx, yy::a, x: ma si è trovato aa, zz: a, x; onde aa, zz :: xx, yy; ed estraendo la radice quadra da tutt'i termini, s'avrà a, z :: x y: ma si ha a, z :: z, x, ed x, y::y, b; però queste quattro ragioni son'eguali, ed abbiamo a, z :: z, x : : x, y : : y, b.

Parimente, se si cercano sette medie Geometriche fra due linee a, b, si pigli una media Geometrica x fra a e b, e poi tre fra a ed x, ed altre tre fra x e b, e così successivamente; il che si proverà nello stesso modo.

215. PROBLEMA. *Fra due date linee ritrovare quante si voglia medie proporzionali Aritmetiche* (Fig. 130.).

Sieno p. e. AB, AC le linee, fra cui ritrovar debbonsi tre medie aritmetiche; divido la differenza BC di queste due linee in tante parti uguali più una, quante sono le medie, che si cercano, cioè in quattro BD, DE, EH, HC. Alla linea AB do la parte BD, e AD sarà la prima media ricercata; a AD aggiungo la parte DE, e la retta AE sarà la seconda media: finalmente ad AE aggiungo la parte EH, e la retta AH sarà la terza; e le cinque linee AB, AD, AE, AH, AC saranno in progressione Aritmetica, poichè ciascuna eccede la sua contigua d' una stessa quantità, ovvero, perchè regna sempre la medesima differenza.

216. PROPOSIZIONE LII. *Se tre linee sono in progressione Aritmetica ascendente, o discendente, la prima per rapporto alla seconda è minore, di quello sia la seconda per rapporto alla terza, e'l prodotto dell'estreme è minore del quadrato della media.*

Sieno le tre linee AB, AC, AD (*Fig.* 131.) in progressione aritmetica ascendente, e le cui differenze BC, CD sieno in conseguenza uguali; fra le due estreme AB, AD cerco una media Geometrica AX, e poichè le tre linee AB, AX, AD sono in progressione Geometrica; le lor differenze BX, XD sono tra loro come le linee AB, AX (*N.* 213.); e siccome AB è minore di AX, così la differenza BX è minore della differenza XD; perciò, essendo BD divisa in X in due parti disuguali, di cui BX è la mi-

minore, detta differenza BX è minore della metà BC di BD, la cui metà è la differenza della progressione Aritmetica; e quindi la media proporzionale Geometrica AX è minore della media Aritmetica AC; dal che ne segue, che AB è minore per rapporto ad AC, di quello sia per rapporto ad AX: ma nella progressione Geometrica noi abbiamo AB, AX : : AX, AD; onde AB è altresì minore per rapporto ad AC che AX per rapporto a AD: ora AC è maggiore per rapporto a AD, di quello sia AX per rapporto alla stessa AD; dunque molto più AB è minore per rapporto ad AC, di quello sia AC per rapporto a AD.

Ora supponiamo, che la progressione Aritmetica AD, AC, AB sia discendente; fra queste due linee prendo la media Geometrica AX, il che ci dà la progressione Geometrica AD, AX : : AX, AB; e poichè le differenze DX, XB sono fra loro come le linee AD, AX (*N.* 213.), la differenza DX sarà maggiore della differenza XB, a motivo di AD maggiore di AX: così DX sarà maggiore della metà DC della linea DB, la cui metà è la differenza della progressione Aritmetica; la media Geometrica AX sarà dunque minore della media Aritmetica AC, e per conseguenza AD sarà minore per rapporto ad AC, di quello sia per rapporto ad AX; e siccome AD, AX : : AX, AB, la linea AD sarà altresì minore per rapporto ad AC, di quello sia AX per rapporto ad AB: ora AX è minore per rapporto ad AB che AC per rapporto ad AB; onde molto più AD è minore per rapporto ad AC, di quello sia AC per rapporto ad AB.

Così in amendue i casi la prima linea della progressione Aritmetica è minore per rapporto alla seconda, di quello sia la seconda per rapporto alla terza; il che doveasi 1°. dimostrare.

Poichè nell'uno e nell'altro caso la media Geometrica AX è minore della media Aritmetica AC, il quadro di AX è altresì minore del quadro di AC: ora, nella progressione Geometrica AB, AX : : AX, AD, ovvero AD, AX : : AX, AB, si ha $\overline{AX}^2 = AB \times AD$; dunque $AB \times AD$ è minore del quadrato $\overline{AC}^2$: così nella progressione Aritmetica AB, AC, AD, o AD, AC, AB il prodotto dell'estreme è minore del quadrato della media. Il che si dovea 2°. dimostrare.

CAPITOLO SESTO.

Delle Proprietà del Circolo.

217. DIFFINIZIONI. Se una retta AB (*Fig.* 132.), tirata dall'uno all'altro punto della circonferenza del circolo, non passa pel centro, dicesi *Corda*.

Si è dimostrato (*N.* 60.), che la circonferenza non può segare ch'in due punti una corda, la quale si prolungasse ancora dall'una, e dall'altra parte. La porzione ACB del circolo segata dalla corda dicesi *Segmento minore*, e l'altra porzione AEB si dice *Segmento maggiore*.

218. Qualsivoglia linea RS (*Fig.* 132.), che tocca una circonferenza senza segarla, dicesi *Tangente*; e qualunque linea HM (*Fig.* 133.), che parte da un punto esteriore H, e che divide la circonferenza in due punti N, M, appellasi Secante.

219. Se da un punto B, in cui la retta RS (*Fig.* 132.) tocca il circolo, tirasi una corda AB, l'angolo ABR, volto dalla banda del segmento minore, dicesi *Angolo del segmento minore*; e l'angolo ABS, volto dalla banda del segmento maggiore, appellasi *Angolo del Segmento maggiore*.

220. L'angolo AOC (*Fig.* 133.), formato da due raggi AO, CO, si nomina *Angolo al centro*; e l'angolo NMA, formato da due corde NM, MA, nomasi *Angolo alla circonferenza*.

221. La porzione di circolo AOC compresa fra due raggi dicesi *Settore del Circolo*.

222. Se dai termini d'una corda AB (*Fig.* 134.) tiransi due rette a qualunque punto C dell'arco del segmento minore, l'angolo ACB, formato in C, appellasi *Angolo nel Segmento minore*; e se dagli stessi termini A, B tiransi due rette a qualunque punto D dell'arco del segmento maggiore, l'angolo ADC, formato in D, appellasi *Angolo nel Segmento maggiore*.

223. Se due circonferenze di circolo hanno lo stesso centro, diconsi *Circonferenze Concentriche*; e se due circonferenze di circolo, di cui l'una è nel circolo dell'altra, non hanno il medesimo centro, diconsi *Eccentriche*.

224. PROPOSIZIONE LIII. *Se una retta* OS (Fig. 135.), *che*

che passa pel centro O, *sega per mezzo una corda* AB, *le è perpendicolare; e se è perpendicolare ad* AB, *la sega in due parti uguali. E nell' uno e nell' altro caso l' arco* ASB, *sostenuto dalla corda, è segato per mezzo; alla fine, se l' arco* ASB *è segato per mezzo da una retta* OS, *che passa per lo centro, ella sarà perpendicolare sopra la corda*[1], *e la segherà in due parti eguali.*

All' estremità della corda tiro i raggi OA, OB, che sono due obblique uguali tirate dallo stesso punto O sopra la linea AB: così la perpendicolare, che dal punto O tirerebbesi sopra AB, segherebbe la retta AB nel punto R, da cui è divisa per mezzo (*N.* 54.): ma, per ipotesi, la retta OS, che passa per lo stesso punto O, passa altresì pel punto R, poichè divide AB in due parti eguali; onde la retta OS non differisce dalla perpendicolare, che tirerebbesi dal punto O, perocchè entrambe avrebbero due punti comuni O, R; il che si dovea 1°. dimostrare.

Se supponiamo, che OS sia perpendicolare ad AB, egli è evidente, che divider dee per mezzo AB, a motivo dell' obblique uguali OA, OB (*N.* 54.); il che si dovea 2°. dimostrare.

Poichè in entramb' i casi i due triangoli OAR, OBR hanno i tre lati uguali ciascuno a ciascuno, essi son perfettamente uguali(*N.*100.); dunque uguali sono gli angoli AOS, BOS; e per conseguenza gli archi AS, SB, che misurano detti angoli, e l' arco AB è diviso per mezzo dalla retta OS: il che doveasi 3°. dimostrare.

Alla fine, se l'arco AB è diviso per mezzo in S dalla retta SO, che passa pel centro; ella passa per gli stessi punti O, S, per cui passerebbe la perpendicolare OR, o la retta, che partendo dal centro O dividerebbe AB in due parti uguali; dunque SO è la stessa che l'una, o l'altra di queste linee, e in conseguenza ella è perpendicolare sopra AB, e la divide per mezzo; il che si dovea 4°. dimostrare.

225. COROLLARIO I°. *Se una linea* SO, *che passa pel centro, divide un' arco* AB *in due parti uguali, detta linea, prolungata di là dal centro in* H, *dividerà altresì per mezzo l' arco opposto* AHB.

La linea SO prolungata in H è diametro, e divide la circonferenza in due parti uguali SAH, SBH; da una parte dunque sottraendo l'arco SA, e dall'altra l' arco SB uguale ad SA, il residuo AH sarà uguale al residuo BH.

226. COROLLARIO II. *Qualsivoglia linea* SH, *che divide per mezzo una corda* AB, *e che ad essa è perpendicolare, passa pel centro* O.

Al-

Altrimenti, dal punto R tiro una retta al centro, la quale sarà perpendicolare sopra AB., poichè la divide in due parti uguali (*N.* 224.); sopra uno stesso punto R si potrebbero dunque alzar due perpendicolari ad AB, il ch'è impossibile.

227. PROBLEMA. *Trovare il centro d'un circolo* (Fig. 35.).

Tiro una corda ad AB, ch'io divido per mezzo in R; poi alzo in R la perpendicolare HS, che d'amendue le parti prolungo fino alla circonferenza; e dividendo HS in due parti uguali in O, detto punto sarà 'l centro cercato; il ch' è evidente per la precedente proposizione, e pe' suoi Corollarj.

228. PROBLEMA. *Far passare una circonferenza di circolo per tre dati punti* A, B, C (*Fig.* 136.), *i quali non sieno in retta linea*.

Colla retta AB congiungo i punti A, B, e colla retta AC i punti A, C; divido per mezzo ciascuna di queste rette ne' punti M, N, sopra cui alzo delle perpendicolari indefinite MR, NS; poi, preso per centro il punto O, in cui dette perpendicolari si segano, con un'apertura di compasso uguale alla distanza OA del punto O ad A descrivo una circonferenza, che passi per gli altri due punti B, C; ciò ch'io provo nel seguente modo:

Se le rette AB, AC fossero in retta linea, le perpendicolari MR, NS sarebber parallele, e non si segherebbono (*N.* 68.): ma siccome queste rette AB, AC s' inclinan l' una all'altra, così anche le perpendicolari debbono fra loro avvicinarsi dalla banda dell'angolo BAC, e però segarsi in un punto O. Ora posto questo.

Giacchè la perpendicolare MR passa pel punto M equidistante dai termini A, B della retta AB, in egual distanza dagli stessi termini A, B (*N.* 56.) esser dee parimente il punto O di questa perpendicolare; e perciò il punto O della perpendicolare NS esser dee ugualmente lontano dai termini A, C della retta AC; onde il punto O è equidistante dai tre punti A, B, C, e per conseguente la circonferenza, che ha per centro il punto O, e che passa per A, passar dee per gli altri due B, C.

229. COROLLARIO I°. *Egli è impossibile far passare due differenti circonferenze di circolo per tre dati punti* A, B, C.

Imperocchè le rette AB, AC sarebbero corde dell'uno e dell'altro circolo, e conseguentemente il centro della seconda circonferenza, che vorrebbesi far passare per questi tre punti, ritrovar si dovrebbe sopra la perpendicolare MR, che sega la corda AB in due parti uguali (*N.* 226.), e perciò anche sopra la perpendi-

di-

dicolare NS, che divide per mezzo la corda AC. Di più egli dovrebbe differire dal centro O della prima circonferenza; perciocchè altrimenti queste due circonferenze non sarebbon differenti, a motivo ch' avrebbero lo stesso centro, e 'l medesimo raggio. Ma egli è impossibile ritrovare un punto differente da O, che sia sopra l'una e l'altra perpendicolare, non segandosi esse ch' in un sol punto (*N.* 35.); egli è dunque impossibile di far passare due diverse circonferenze per i tre punti A, B, C.

230. COROLLARIO II. *Due circonferenze di circolo non possono dunque segarsi in tre punti.*

Altrimenti si potrebbero ancora far passare due circonferenze per tre dati punti; il ch' è impossibile.

231. COROLLARIO III. *Puossi sempre far passare una circonferenza per i tre vertici degli angoli d' un triangolo.*

I tre vertici degli angoli d'un triangolo non sono giammai posti in diritto. Ma si può far passare una circonferenza per tre punti, i quali non sieno in retta linea (*N.*228.). Dunque, ec.

232. PROPOSIZIONE LIV. *La massima di tutte le linee, che possono da un punto* A (Fig. 137.), *preso fra 'l centro e la circonferenza, tirarsi alla circonferenza d'un circolo, si è la retta* AB, *che passa pel centro; la minima è la retta* AC *prolungamento della linea* AB; *e l' altre* AM, AN, ec. *van diminuendo, a misura che s' allontanano dalla maggiore* AB.

Dal centro O tiro la retta OM; nel triangolo AOM i due lati AO, OM presi insieme son maggiori del lato AM: ora OM è uguale ad OB, essendo l'una e l'altra raggio dello stesso circolo; dunque $AO + OM = AO + OB$, od AB, e per conseguenza la retta AB, che passa pel centro, è maggiore della retta AM, che pel centro non passa; e nello stesso modo si proverà, che AB è maggiore di AN, e così dell'altre: il che doveasi 1°. dimostrare.

Tiro il raggio ON; i triangoli AOM, AON hanno il lato AO comune, e 'l lato OM uguale al lato ON: ma l' angolo AOM contenuto nel primo è maggiore dell'angolo AON contenuto nel secondo; dunque la base AM del primo è maggiore della base AN del secondo (*N.* 108.), cioè la retta AM più vicina alla massima AB è maggiore della retta AN da essa più lontana, e così dell' altre: il che doveasi 2°. dimostrare.

Nel triangolo AON, i due lati AO, AN pres' insieme son maggiori del lato AN: ma $ON = OC$; dunque $AO + AN$ è maggiore di OC, o di $OA + AC$: così, dall'una e dall' altra

parte

parte sottraendo OA, avremo AN maggiore di AC; cioè 'l prolungamento AC della massima AB è minore di AN, e così delle altre; il che doveasi 3°. dimostrare.

233. COROLLARIO I°. *Dal punto A alla circonferenza non si possono tirare più di due linee uguali; e la retta, che congiugne l' estremità dell' uguali, è segata per mezzo dalla massima* AB, *che ad essa è perpendicolare.*

Prendo l' arco BS uguale all'arco BM, e dal punto S tiro le rette SA, SO: l'angolo SOB è dunque uguale all'angolo MOB, a motivo che uguali sono gli archi BS, BM, che misurano questi angoli; e poichè l' angolo SOB e 'l suo conseguente SOA equivagliono a due retti (*N.* 49.), non meno che l' angolo MOB e 'l suo conseguente MOA, gli angoli SOA, MOA sono uguali; e per conseguenza i triangoli SOA, MOA, che hanno 'l lato AO comune, il lato OS uguale al lato OM, e l'angolo contenuto SOA uguale all' angolo contenuto MOA, sono perfettamente uguali (*N.* 100.); onde la retta AS è uguale alla retta AM, e così dell'altre; il che doveasi 1°. dimostrare.

Egli è per se manifesto, che non si possono trovare tre linee, tirate dal punto A alla circonferenza, fra loro uguali; poich' e' converrebbe, che due ve ne fossero da una stessa parte per rapporto alla massima AB, e quelle due sarebbon disuguali, perchè sarebbero in disugual distanza dalla massima; il che si dovea 2°. dimostrare.

Finalmente, diviso l' arco SM in due parti uguali dalla retta BA, che passa pel centro, la corda SM, che congiugne l'estremità dell' uguali AS, AM, è divisa per mezzo, e perpendicolarmente dalla retta BA (*N.*224.); il che doveasi 3°. dimostrare.

234. COROLLARIO II. *Se un punto* A *trovasi infra'l centro e la circonferenza, la distanza, ch' evvi da questo punto alla circonferenza, si è la retta* AC *presa sopra 'l diametro, che passa pel punto* A.

Per la precedente proposizione, la retta AC è la più corta, che tirar si possa dal punto A alla circonferenza; ond' ella misura la distanza, ch' evvi dal punto A alla circonferenza.

235. PROPOSIZIONE LV. *La massima di tutte le secanti* AB, AM, AN, ec. (Fig. 138.), *che posson tirarsi da un punto* A, *si è quella, che passa pel centro* O; *e l' altre van diminuendo, a misura che s' allontanano dalla massima.*

Tirisi 'l raggio OM; nel triangolo AOM si ha $AO + OM$ maggiore di AM: ma $OM = OB$; dunque $AO + OB$ od AB è maggiore di AM; cioè la secante AB, che passa pel centro, è mag-

maggiore di AM, che pel centro non paſſa; e così dell' altre. Il che doveaſi 1°. dimoſtrare.

Tiro 'l raggio ON; i triangoli AOM, AON hanno il lato AO comune, e 'l lato OM uguale al lato ON: ma l'angolo AOM contenuto nel primo è maggiore dell' angolo AON contenuto nel ſecondo; dunque la baſe AM del primo è maggiore della baſe AN del ſecondo (*N.* 108.), cioè la ſecante più vicina alla ſecante AB, che paſſa per lo centro, è maggiore della ſecante AN, che n'è più lontana; e così dell' altre. Ciò che doveaſi 2°. dimoſtrare.

236. COROLLARIO. *Dal punto* A *ſi poſſon tirare quante ſi voglia ſecanti uguali due a due, ma giammai ſe ne troveranno tre d'uguali; e le linee, che congiungono l'eſtremità dell' uguali, ſon diviſe per mezzo e perpendicolarmente dalla ſecante* AB, *la quale paſſa pel centro.*

Prendo l'arco BS uguale all' arco BM, e tiro le rette SA, SO; gli angoli SOB MOB ſon dunque uguali, per eſſere miſurati dagli archi uguali BS, BM; dunque ſono altresì uguali i loro angoli conſeguenti SOA, MOA, non meno ch' i loro triangoli SOA, MOA, i quali hanno 'l lato AO comune, il lato SO uguale al lato MO, e l'angolo contenuto SOA uguale all' angolo contenuto MOA (*N.* 100.); e per conſeguenza il lato AS è uguale al lato AM, cioè le ſecanti egualmente lontane dalla maſſima AB ſono uguali; e così dell' altre. Il che ſi dovea 1°. dimoſtrare.

Ciaſcun' altra ſecante, che ſi voleſſe tirar dal punto A, eſſer dee o più vicina, o più lontana dalla ſecante AB, di quello ſieno le ſecanti AS, AM, che ne ſono ugualmente lontane; ed in conſeguenza ella ſarà o maggiore, o minor di ciaſcheduna delle ſecanti AS, AM: non ſi poſſono dunque ritrovar giammai tre ſecanti uguali; il che ſi dovea 2°. dimoſtrare.

L'arco SM è diviſo in due parti eguali dalla linea BA, che paſſa pel centro; dunque BA ſega per mezzo e perpendicolarmente la corda SM (*N.* 224.), che congiugne i termini delle ſecanti uguali AS, AM; il che doveaſi 3°. dimoſtrare.

237. PROPOSIZIONE LVI. *La minima di tutte le parti eſteriori* AC, AR, AT, ec. (Fig. 139.) *delle ſecanti* AB, AM, AN, ec. *che ſi poſſon tirare dal punto eſteriore* A, *è quella, la cui ſecante* AB *paſſa pel centro* O; *e l' altre* AR, AT, ec. *vanno creſcendo, a miſura che s' allontanan da* OC.

Tiriſi 'l raggio OR; nel triangolo ARO ſi ha AR + RO mag-

gior di AO, o di AC + CO, e da una parte levando RO, e dall'altra CO = RO, il residuo AR è maggiore di AC; cioè la parte esterna AC della secante AB, che passa per lo centro, è minore della parte esterna AR della secante AM, che pel centro non passa; e così dell'altre. Il che doveasi 1°. dimostrare.

Tiro'l raggio OT; i lati AT, TO del triangolo ATO pres' insieme sono maggiori de'lati OR, RA del triangolo ARO(*N.*38.); da una parte dunque sottraendo la retta TO, e dall'altra la retta RO = TO, il residuo AT è maggiore del residuo AR; cioè la parte esterna AT della secante AN più lontana dalla secante AB, che passa per lo centro, è maggiore della parte esterna AR della secante AM; e così dell'altre. Il che doveasi 2°. dimostrare.

238. COROLLARIO. *Si posson sempre ritrovare quante si voglia parti esteriori uguali due a due, ma giammai se ne troveranno tre d'uguali; e le linee, che congiungono l'estremità dell' uguali, son divise per mezzo e perpendicolarmente dalla secante* AB, *che passa per lo centro*,

Prendo l'arco CS uguale all'arco CR, e tiro le rette SA, SO; uguali son dunque gli angoli SOC, ROC, per essere misurati dagli archi uguali CS, CR, ed i triangoli SOA, ROA sono perfettamente uguali, perocchè hanno il lato AO comune, il lato SO uguale al lato RO, e l'angolo SOA uguale all'angolo ROA (*N.* 100.); e per conseguenza il lato AS è uguale al lato AR, cioè le parti esteriori AS, AR delle secanti egualmente lontane dalla secante AB, che passa per lo centro, sono uguali; e così dell'altre. Il che si dovea 1°. dimostrare.

Dal punto A non può tirarsi alcuna parte esteriore, che non sia più lontana, o vicina alla parte AC delle due uguali AS, AR, e ch'in conseguenza non sia o maggiore, o minor di cadauna di esse due; non si possono adunque ritrovare tre parti esteriori uguali; il che si dovea 2°. dimostrare.

La linea AB, che passa pel centro, sega l'arco SR in due parti uguali; ond'ella sega altresì per mezzo e perpendicolarmente la corda SR (*N.* 224.), che congiugne l'estremità dell'uguali AS, AR; il che si dovea 3°. dimostrare.

NOTA. Poichè la minima di tutte le parti esteriori delle secanti, che tirar si possono da un punto esterno A, si è l'esteriore AC della secante AB, che passa pel centro; ne segue, che *la distanza d'un punto esteriore* A *ad una circonferenza di circolo si è la parte* AC *d'una retta* AB *tirata dal punto* A *al centro*.

239. PRO-

239. PROPOSIZIONE LVII. *Se una retta* PQ (Fig. 140.) *tocca una circonferenza, essa non la tocca ch' in un sol punto* Q.

Supponiamo, che la tocchi in un' altro punto H; tiro la retta HQ, che sarà 'l prolungamento di PQ, poichè si suppone, che la stessa retta PQ seghi la circonferenza in Q, ed H. Tiro parimente i raggi QO, HO; e poichè 'l triangolo HOQ è isoscele, la perpendicolare tirata dal punto O sopra la base HQ passerà pel mezzo L di detta base (*N.* 107.): ora, questa perpendicolare sarà più corta dell' obblique OH, OQ (*N.*53.); dunque la sua estremità L, in cui ella divide la retta HQ, sarà nel circolo, cioè tra 'l centro, e la circonferenza; e perciò la retta HQ non sarà una tangente, perocchè avrà un punto L nel circolo.

240. PROPOSIZIONE LVIII. *Se una linea* MN (Fig. 140.) *tocca un circolo, e che dal punto* A, *ch' appellasi punto del contatto, tirisi un raggio* AO, *esso raggio sarà perpendicolare sopra la tangente.*

Poichè la tangente non può toccare la circonferenza ch' in un sol punto A, tutti gli altri suoi punti saranno fuori della circonferenza, e saran più lontani dal centro ch' il punto A: così tutte le linee tirate da questi punti al centro sono più lunghe di AO; ed in conseguenza, per essere AO la più corta di quante se ne posson tirare dal punto O sopra MN, ella è altresì perpendicolare sopra MN (*N.* 53.).

241. COROLLARIO. *Una sola tangente può toccare il circolo in un punto* Q (Fig. 140.).

PQ tocca il circolo in Q; se supponesi, che un' altra retta QH il tocchi nel medesimo punto Q, tiro 'l raggio QO, che sarà perpendicolare sopra PQ (*N.* 240.), e per conseguenza obbliquo sopra QH (*N.* 57.); perciò la perpendicolare, che tirerebbesi dal punto O sopra HQ, sarebbe più corta dell' obbliqua QO, e conseguentemente segherebbe HQ entro 'l circolo; dunque HQ non potrebbe esser tangente.

242. PROBLEMA. *Da un dato punto* A *sopra la circonferenza d' un circolo* (Fig. 140.) *tirare una tangente.*

Tiro 'l raggio AO, e sopra la sua estremità A tiro una perpendicolare MN, ch' è la tangente ricercata (*N.* 240.); imperocchè, essendo OA la più corta, che tirar si possa dal punto O sopra tutt' i punti di MN, tutti detti punti, eccettuato 'l punto A, son fuori della circonferenza; e però MN è la tangente cercata.

243. PROPOSIZIONE LIX. *Due circoli, che si tocchino, avranno il loro contatto in un sol punto.*

Se i centri O, H de' due circoli RMS, RST (*Fig.* 141.) non sono amendue in un medesimo circolo, e che si pretenda, che questi due circoli si tocchino ne' punti R, S senza segarsi; tiro i raggi OR, OS, HR, HS, e la retta RS. Uguali essendo i raggi OR, OS, il punto O è ugualmente lontano dall' estremità R, S della linea RS; e per la stessa ragione il punto H è altresì equidistante dall' estremità R, S; tirando dunque la retta OH per i due centri O, H, essa è perpendicolare sopra RS (*N.* 58.), e la sega in due parti uguali: così, essendo i due raggi OR, HR presi insieme maggiori della retta OH, alle cui estremità essi girano, le lor circonferenze si segano in R, S (*N.* 59.); e perciò non si toccano come volevasi.

Se i centri O, H de' due circoli sono in un medesimo circolo RMS (*Fig.* 142.), e che si pretenda, che le due circonferenze si tocchino in due punti R, S; dal centro O del circolo minore tiro i raggi OR, OS; e siccome questo centro O è tra 'l centro H del maggiore, e la sua circonferenza, così le rette uguali OR, OS non sono la più corta linea, che dal punto O tirar si possa alla circonferenza RMS; dovendo questa più corta linea OP passare fra l'uguali OR, OS, e ritrovarsi in ugual distanza d' amendue (*N.* 233.); onde il punto P della circonferenza RMS del circolo maggiore è più vicino al centro O del circolo minore, che la circonferenza RTS di detto circolo minore; e perciò la circonferenza RTS sega la circonferenza RMS, senza che l'una tocchi l' altra siccome volevasi.

244. PROPOSIZIONE LX. *Se la posizione di due circoli è tale, ch' i due centri non sieno amendue nell' uno de' cerchj; e la linea* OH (Fig. 143.), *che congiugne i due centri, è maggiore della somma de' raggi* OR, HS, *e in tal' caso i due circoli nè si toccano, nè si segano; o la stessa* OH (Fig. 144.) *equivale alla somma de' raggi* OR, RH, *e 'n tal caso i due circoli si toccano senza segarsi; o finalmente la retta* OH (Fig. 145.) *è minore della somma de' raggi* OR, HS, *ed in tal caso i circoli si segano.*

Nel primo caso (*Fig.* 143.), in R ed S alzo le perpendicolari MT, NV, che sono fra lor parallele (*N.* 68.), e ch' in conseguenza non si segano: ora, MT è tangente del circolo RCD (*N.* 242.), ed NV è tangente del circolo SEL; perciò, essendo questi due circoli interamente fuori delle parallele MT, NV, non possono nè toccarsi, nè segarsi.

Nel

Nel secondo caso (*Fig.* 144.), alzo in R la perpendicolare MN, la qual'è tangente d' amendue i circoli, per essere perpendicolare sopra i raggi OR, ed HR: così, essendo le due circonferenze, l' una interamente a sinistra, e l'altra interamente a dritta di MN, si toccano in R senza segarsi.

Nel terzo caso, (*Fig.* 145.), essendo i due raggi OR, HS pres' insieme maggiori della retta OH, intorno le cui estremità essi si ravvolgono, le due circonferenze debbon segarsi (*N.* 59.).

245. COROLLARIO. *Se due circoli* RCD, REF (Fig. 144.) *si toccano esteriormente, la linea* OH, *che congiugne i due centri, passa pel punto del contatto* R.

La linea OH non può esser maggiore della somma de' raggi, imperciocchè altramente i due circoli nè si segherebbero, nè si toccherebbono (*N.* 244.); la stessa linea non può nè meno esser minore della somma de' raggi, imperocchè altrimenti i due circoli si segherebbero (*N.* 244.): e' convien dunque, che OH sia uguale alla somma de' raggi; perciò, sopra OH pigliando la parte OR uguale al raggio del primo circolo, il residuo RH sarà 'l raggio del secondo: così, in R alzando la perpendicolare MN, che sarà tangente de' due circoli, essi si taglieranno in R; e però OH passerà pel punto del contatto R.

246. PROPOSIZIONE LXI. *Se la posizione di due circoli è tale, ch' i due centri sieno amendue nell' uno de' cerchj; o la linea* HO (Fig. 146.), *che congiugne i centri* H, O, *è minore della differenza de' raggi* HS, OC, *e in tal caso le due circonferenze nè si toccano, nè si segano; o la stessa* HO (Fig. 147.) *è uguale alla differenza de' raggi* HS, OS, *e 'n tal caso le due circonferenze si toccano senza segarsi; o finalmente la retta* HO (Fig. 148.) *è maggiore della differenza de' raggi* HS, OR, *e in tal caso le due circonferenze si segano.*

Nel primo caso (*Fig.* 146.), dal raggio HS levo la parte OH; e per essere OH minor della differenza del raggio HS al raggio OC, ne segue, ch' il residuo OS è maggiore di OC; così 'l punto S della circonferenza SEL è fuori della circonferenza RCD del raggio CO: ora, essendo 'l punto O tra'l centro H del circolo maggiore e la sua circonferenza SEL, e passando la linea SO prolungata pel centro H, essa è la più corta di quante se ne posson tirare dal punto O alla circonferenza SEL (*N.* 232.); dunque molto più tutte le linee, che dal punto O tirar si potrebbero alla circonferenza SEL, sarebbon maggiori del raggio OS; e

per

per conseguente tutt' i punti della circonferenza SEL, in cui andrebbero a terminar queste linee, son fuori della circonferenza RCD, e le due circonferenze non possono nè segarsi, nè toccarsi.

Nel secondo caso (*Fig.* 147.), dal raggio HS levo la retta OH, e'l residuo OS equivale al raggio del circolo minore, imperocchè, per la supposizione, la retta OH si è la differenza di questi due raggi. Le due circonferenze passan dunque per S: ora, essendo 'l punto O infra la circonferenza SEL del circolo maggiore e'l suo centro H, e per detto centro passando la retta SO prolungata, essa è la più corta, che tirar si possa dal punto O alla circonferenza SEL (*N.*232.); onde, giacchè tutte le linee, che da un punto O tirar si vorrebbero alla circonferenza SEL, son maggiori del raggio SO del circolo minore, uscir debbono fuori della circonferenza SCD del minore; e perciò, null'altro avendo le due circonferenze di comune ch' il punto S, si toccano in detto punto senza segarsi.

Nel terzo caso (*Fig.* 148.), dal raggio HS levo la retta OH; e siccome essa è maggiore della circonferenza de'raggi HS, OR, il residuo OS è minor del raggio OR; così la circonferenza SEL del circolo maggiore passa fra'l centro O e la circonferenza RCD del minore. Ora, posto ch'il raggio HS del circolo maggiore sia più grande che'l raggio OR del circolo minore, e ch'il centro H del maggiore sia di quà dal centro O del minore per rapporto a' punti S, R; egli è evidente, che se si prolungano i raggi SH, RO in V ed X, il raggio HV del circolo maggiore andrà a terminare in un punto V della sua circonferenza, più distante dal centro O del circolo minore ch' il punto X della circonferenza del minore, in cui andrà a terminare il raggio OX del minore: così, avendo la circonferenza SEL un punto S entro'l circolo minore, ed un punto V di fuori, queste due circonferenze debbon necessariamente segarsi.

247. COROLLARIO. *Se due circoli* SEL, SCD *(* Fig. 147. *) si toccano interiormente, la retta* HS *tirata dai due centri passa pel punto del contatto* S.

La retta HO, tirata dall'uno all'altro centro, non può esser minore della differenza de' due raggi, imperciocchè altrimenti i due circoli nè si toccherebbero, nè si fegherebbono (*N.* 246.); il ch' è contro la supposizione. Non può nè meno la stessa HO esser maggiore della differenza de'due raggi, perchè altrimenti i due circoli si segherebbero (*N.* 246.); il che è altresì contro l'ipotesi.

Dee

Dee dunque questa retta HO esser' uguale alla differenza de' due raggi; perciò, prolungando HO in S fino alla circonferenza del circolo maggiore, e dal raggio HS del circolo maggiore togliendo la retta HO, il residuo OS esser dee il raggio del circolo minore; e per conseguente le due circonferenze passano pel punto S della retta HS.

248. PROBLEMA. *Trovar la maggiore e la minor distanza di due circonferenze eccentriche* SEL, RCD (Fig. 149. 150.), *le quali nè si seghino, nè si tocchino.*

Da' due centri H, O tiro una retta SV, che d' amendue le parti termina alla circonferenza del circolo maggiore: la parte SR di questo diametro, compresa fra le due circonferenze dalla banda del centro O del circolo minore, è la minor distanza delle due circonferenze, e la parte TV, compresa fra le due circonferenze dalla banda del centro H del circolo maggiore, è la maggior distanza; il che io provo in questo modo.

Dal centro O del circolo minore tiro a tutt' i punti della massima circonferenza delle rette ON, OE, ec. Essendo i punti S, N, E, V della massima circonferenza tutti esteriori al circolo minore, le lor distanze alla circonferenza del circolo minore sono sopra le rette SO, NO, EQ, ec. tirate da questi punti pel centro O (*per la nota del N.* 238.); così queste distanze sono le rette SR, NP, EQ, ec. ora, essendo 'l punto O infra 'l centro H del circolo maggiore e la sua circonferenza SNEL, la retta OS è la minore, che tirar si possa dal punto O alla circonferenza SNEL; e l'altre ON, OE, ec. vanno aumentando fino all'ultima OV, ch' è la maggiore (*N.* 232.); se dunque dalle linee OS, ON, OE, OV, che vanno crescendo, leviamo le rette OR, OP, OQ, OT fra loro uguali, per essere tutte raggi del circolo minore, i residui SR, NP, EQ, TV andran sempre crescendo; e per conseguenza SR sarà la distanza minore, e TV la maggiore.

Egli è per se evidente, che lo stesso troverebbesi dalla banda della semicirconferenza SLV.

Le figure 149. 150. in ciò fra loro differiscono, che nella prima i due centri O, H sono entrambi compresi nel circolo minore; e viceversa, i due centri O, H non sono entrambi compresi nella seconda; nel resto la dimostrazione è l'istessa in tutti due i casi.

249. PROPOSIZIONE LXII. *La massima di tutte le corde d' un circolo è 'l diametro, e 'l altre sono tanto minori, quanto più son lontane dal centro* O (Fig. 151.).

Dal

Dal centro O tiro all' eſtremità della corda CD i raggi CO, OD, e nel triangolo COD abbiamo CO + OD maggiore di CD (*N.* 95.) : ora, il diametro AB è uguale ai due raggi CO, OD pres' inſieme; dunque 'l diametro è maggiore della corda CD; e così in altri caſi. Il che dovea 1°. dimoſtrarſi.

Sieno le due corde CD, HR, di cui la ſeconda HR è più lontana dal centro O che la corda CD; tiro i raggi OC, OD, OH, OR, e dal centro O tiro le perpendicolari ON, OM ſopra le corde, ciaſcuna delle quali per conſeguenza è ſegata in due parti uguali (*N.* 224.) : ora, nel triangolo rettangolo NOC, ſi ha $\overline{CO}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{NO}^2$ (*N.* 171.) ; e 'l triangolo rettangolo MOR ci dà $\overline{OR}^2 = \overline{RM}^2 + \overline{MO}^2$: ma CO = OR; dunque $\overline{CO}^2 = \overline{OR}^2$; e però $\overline{CN}^2 + \overline{NO}^2 = \overline{RM}^2 + \overline{MO}^2$: ma per ipoteſi la diſtanza NO dalla corda CD al centro è minore della diſtanza MO della corda RH al centro; onde $\overline{NO}^2$ è minor di $\overline{MO}^2$, ed in conſeguenza $\overline{CN}^2$ eſſer dee maggiore di $\overline{RM}^2$, e CN maggior di RM; però 'l doppio CD di CN è maggiore del doppio RH di RM, cioè la corda CD più vicina al centro è maggiore della corda RH, che n' è più lontana; e così ec. Il che ſi dovea 2°. dimoſtrare.

250. COROLLARIO I°. *Le corde equidiſtanti dal centro ſono uguali.*

Supponiamo, che le corde CD, RH ſieno equidiſtanti dal centro; dunque le perpendicolari ON, OM ſaranno uguali: così, tirando i raggi OC, OR, i triangoli rettangoli OCN, ORM avran l'ipotenuſa OC uguale all'ipotenuſa OR, e 'l lato ON uguale al lato OM; e però il terzo lato CN ſarà uguale al terzo RM (*N.* 102.) ; onde la corda CD doppia di CN ſarà uguale alla corda RH doppia di RM.

Si proverà nello ſteſſo modo, che *le corde uguali ſono dal centro equidiſtanti*; poichè, ſupponendo CD = RH, e tirando le perpendicolari ON, OM, avremo CN = RM: così i due triangoli rettangoli avran l' ipotenuſa OC uguale all' ipotenuſa OR, e 'l lato CN uguale al lato RM; però il terzo ON ſarà uguale al terzo OM, e le corde ſaranno equidiſtanti dal centro.

251. COROLLARIO II. *Le corde maggiori ſoſtengono archi maggiori, e gli archi maggiori ſono ſoſtenuti da corde maggiori, per archi intendendo gli archi de' piccioli ſegmenti, che ſon tagliati dalle corde.*

Sieno

Sieno le corde CD, HR, (*Fig.*151.), la di cui la prima CD si supponga maggiore della corda HR; tiro i raggi OC, OD, OH, OR, i triangoli isosceli COD, HOR hanno due lati uguali ciascuno a ciascuno: ma la base CD del primo è maggiore della base RH del secondo; onde l' angolo contenuto COD è maggior dell' angolo contenuto ROH (*N.* 109.); perciò l' arco CD, misura del primo angolo, è maggior dell' arco RH, misura del secondo: ma l' arco CD, o CSD si è l' arco del segmento minore segato dalla corda maggiore CD, e l' arco RH, od RTH si è quello del segmento minore tagliato dalla corda minore RH; dunque, ec. il che si dovea 1°. dimostrare.

Così pure, se l' arco CSD è maggiore dell'arco RTH, i due triangoli isosceli COD, ROH avran due lati uguali ciascuno a ciascuno: ma l' angolo contenuto COD, misurato dall'arco CSD, sarà maggior dell'angolo contenuto ROH, misurato dall'arco RTH; dunque la base del primo, cioè la corda CD sarà maggiore della base RH del secondo, o della corda RH; e così dell' altre. Il che doveasi 2°. dimostrare.

Si proverà nello stesso modo, che *le corde uguali sostengono archi uguali, e che gli archi uguali sono sostenuti da corde uguali.*

252. PROPOSIZIONE LXIII. *Ciascun' angolo* ABC (Fig. 152.), *che ha'l suo vertice* B *alla circonferenza, vale la metà dell' arco* AC *abbracciato da' suoi lati.*

Dal vertice B pel centro O tiro 'l diametro BR, e dal centro O tiro i due raggi OA, OC; isoscele essendo il triangolo ABO, uguali sono i suoi due angoli OAB, OBA sopra la base AB; dunque l' angolo AOR, esterno a detto triangolo, ed uguale ai due interni opposti (*N.* 97.), è doppio dell' angolo ABO: per la medesima ragione, l'angolo COR esterno al triangolo isoscele COB è doppio dell'angolo CBO; dunque i due angoli AOR, COR pres' insieme, cioè l'angolo AOC è doppio dei due ABO, CBO presi altresì 'nsieme, o dell' angolo ABC: ora l' angolo al centro AOC vale l' arco ARC, ch' egli abbraccia; dunque l' angolo alla circonferenza ABC vale la metà.

253. PROPOSIZIONE LXIV. *Ciascun' angolo del segmento, cioè ciascun' angolo* BAC (Fig. 153.), *formato da una tangente* AB, *e da una corda* AC *tirata dal punto del contatto, vale la metà dell' arco* AHC *del suo segmento.*

Dal punto del contatto tiro 'l raggio AO, e dal centro O tiro la retta OH, ch' è perpendicolare sopra la corda, e ch' in conse-

guenza sega pel mezzo la corda, e l' arco (*N.* 224.) ; l' angolo BAO, formato dalla tangente e dal raggio, è retto (*N.*242.) , e nel triangolo rettangolo ARO, retto essendo l' angolo ARO , gli altri due RAO, ROA presi insieme equivagliono ad un retto (*N.*97.); l' angolo BAO è dunque uguale ai due RAO, ROA presi insieme; e dall' una e dall' altra parte levando l' angolo RAO, resta l' angolo BAC del segmento, uguale all' angolo ROA, od HOA : ma l' angolo al centro HOA equivale all' arco AH, metà dell' arco AHC del segmento ; onde l' angolo BAC del segmento vale la metà dell' arco AHC di detto segmento.

L' angolo MAC del segmento maggiore e l' angolo BAC del minore vagliono insieme due retti (*N.* 49.) , o la metà della circonferenza, cioè la metà dell' arco AHC del segmento minore, più la metà dell' arco ANC del maggiore. Ora, l' angolo BAC vale la metà dell' arco AHC ; dunque l' angolo MAC del segmento maggiore vale la metà dell' arco ANC di detto segmento.

254. PROPOSIZIONE LXV. *Ciascun' angolo* ABC (Fig.154.), *il cui vertice* B *è fra 'l centro e la circonferenza , vale la metà dell' arco* AC *abbracciato dalle sue gambe* BA , BC, *più la metà dell' arco* DE *abbracciato dalle sue gambe prolungate di là dal vertice.*

Tiro la retta EC ; l' angolo ABC, esterno al triangolo BCE, uguaglia i due interni opposti BEC, BCE (*N.* 97.) : ora BEC, od AEC, avendo il suo vertice E alla circonferenza, vale la metà dell' arco AC (*N.*252.) ; e per la stessa ragione BCE, o DCE vale la metà dell' arco DE ; dunque l' angolo ABC vale la metà dell' arco AC, più la metà dell' arco DE.

255. PROPOSIZIONE LXVI. *Ciascun' angolo* ABE , *il cui vertice* B *è fuori del circolo* (Fig. 155.) , *vale la metà dell' arco* AC *abbracciato dalle sue gambe, meno la metà dell' arco* DE *da esse tagliato.*

Tiro la retta AE ; l' angolo AEC esteriore al triangolo ABE uguaglia i due interni opposti ABE, BAE (*N.* 97.) ; perciò l' angolo ABE, od ABC vale l' angolo AEC, meno l' angolo BAE: ma l' angolo alla circonferenza AEC vale la metà dell' arco AC (*N.*252.) , e l' angolo alla circonferenza BAE, o DAE vale la metà dell' arco DE ; dunque l' angolo ABC vale la metà dell' arco AC , meno la metà dell' arco DE .

256. PROPOSIZIONE LXVII. *Ciascun' angolo* ABC(Fig. 156.), *formato da una corda* AB, *e dal prolungamento* BG *d' un' altra corda*

da EB, *vale la metà de' duo archi* BA, BE *sostenuti dalle corde*.

Dal punto B tiro la tangente MN, che seghi l' angolo ABC in altri due MBA, NBC: ora, essendo NBA l'angolo del segmento BA, ei vale la metà dell' arco BA (*N.* 253.), ed essendo l'angolo NBC uguale al suo opposto al vertice MBE, ch' è l' angolo del segmento BE, vale la metà del arco BE; dunque l'angolo ABC vale la metà dell' arco BA, più la metà dell' arco BE.

257. PROPOSIZIONE LXVII. *Ciascun' angolo* ABC(Fig.157.) *d' un segmento equivale all' angolo* BRA *nel segmento opposto, cioè il cui vertice* R *è alla circonferenza del segmento opposto, e le cui gambe abbraccian l' arco* BSA *del segmento minore*.

L'angolo ABC del segmento BSA vale la metà dell' arco BSA di detto segmento (*N.* 253.) : ora, perchè l' angolo BRA nel segmento opposto è alla circonferenza, ei vale altresì la metà dell'arco BSA, ch'abbraccia; dunque, ec.

258. PROBLEMA. *Da un dato circolo tagliare una porzione, o segmento capace d' un' angolo uguale al dato* MTN (Fig. 157.).

Da qualsivoglia punto B del circolo tiro una tangente BC, con cui al punto B faccio un' angolo CBA uguale al dato MTN; qualunque angolo, ch'avrà il suo vertice alla circonferenza del segmento BRA, e che abbraccierà la corda BA, sarà uguale all'angolo CBA del segmento opposto (*N.* 257.), ed in conseguenza all'angolo MTN.

259. PROBLEMA. *In un dato circolo inscrivere un triangolo* BAC (Fig. 158.) *simile al dato* MTN; *cioè, fare ch' il triangolo* BAC *abbia i vertici de' suoi tre angoli alla circonferenza, e sia simile ad* MTN.

Ad un punto qualunque A della circonferenza tiro una tangente RS, con cui al punto A faccio dall'uno de'lati l'angolo CAS uguale all' angolo M, e dall' altro l' angolo BAR uguale all' angolo N; e congiugnendo i punti B, C, in cui le gambe di quest' angoli segan la circonferenza col mezzo della retta BC, il triangolo ABC è simile al dato MTN.

Imperocchè l' angolo ABC nel segmento ABC equivale all' angolo SAC del segmento opposto (*N.* 257.), e per conseguenza anche all'angolo M; parimente, l'angolo ACB nel segmento ACB è uguale all' angolo RAB del segmento opposto, e però all' angolo N; dunque il terzo BAC è uguale al terzo T (*N.*98.), e i due triangoli MTN, ABC sono simili.

260. PROBLEMA. *Data una retta* AB (Fig. 159.) *ritrova-*

re un circolo, in cui posta detta linea per corda tagli una porzione capace d'un'angolo uguale al dato T.

All'estremità A della retta AB faccio un'angolo CAB uguale al dato T; dal punto A sul lato CA alzo una perpendicolare indefinita AR; dal mezzo S della retta AB alzo la perpendicolare SO, che taglia AR in O, e da detto punto O preso per centro, con un'apertura di compasso uguale alla distanza del punto O al punto A descrivo 'l circolo ricercato ABR.

Imperocchè la perpendicolare SO segando AB in due parti uguali, il punto O di detta perpendicolare è equidistante dall'estremità A, B della retta AB (*N.56.*); onde la circonferenza descritta col raggio OA passa per l'altra estremità B, e la retta AB è corda di esso circolo: ora AC è tangente, per esser perpendicolare sopra OA (*N.*242.); dunque CAB è l'angolo del segmento minore, e quest' angolo equivale a qualsivoglia altro ARP, che ritrovisi nel segmento maggiore ARB (*N.*257.): ma l'angolo CAB per la costruzion' equivale al dato T; onde la porzione, o segmento ARC tagliato dalla retta AB, è capace d'un'angolo ARC uguale al dato T.

261. PROBLEMA. *In un dato triangolo* ABC *inscrivere un circolo* (Fig. 160.), *cioè descrivere un circolo, che tocchi i tre lati del triangolo.*

Colle rette AO, CO divido per mezzo i due angoli A, C; dal punto O, in cui dette linee si segano, abbasso sopra i tre lati le perpendicolari OT, OR, OS; dallo stesso punto O preso per centro, con un'apertura di compasso uguale all'una delle perpendicolari OT descrivo un circolo TRS, ch'è 'l ricercato; ed ecco come lo dimostro.

I triangoli rettangoli AOT, AOR hanno l'ipotenusa AO comune, l'angolo retto uguale all'angolo retto, e l'angolo OAT uguale all'angolo OAR per la costruzione; il terzo angolo è dunque uguale al terzo (*N.* 98.), e per conseguenza i due triangoli son perfettamente uguali (*N.*100.): così la perpendicolare OT è uguale alla perpendicolare OR; perciò ancora, i triangoli rettangoli COT, COS sono perfettamente uguali, e la perpendicolare OS è uguale alla perpendicolare OT, e per conseguente ad OR; così la circonferenza descritta col raggio OT passa per l'estremità R, S degli altri due: ora, per essere i tre lati del triangolo ABC perpendicolari sopra i raggi OT, OR, OS, sono tangenti del circolo (*N.* 242.); donde ne segue, che 'l circolo è inscritto, come si cercava.

262. PRO-

262. PROBLEMA. *A un dato circolo circonſcrivere un triangolo* ABC (Fig. 161.) *ſimile a un dato* mnr *; cioè deſcrivere un triangolo* ABC *ſimile al dato* mnr, *ed i cui tre lati tocchino 'l circolo.*

D'amendue le parti prolungo il lato *mr* del triangolo *mnr*; dal centro O del circolo tiro un raggio OH; con eſſo faccio in O un'angolo TOH uguale all'eſterno *nmp*, e dall'altro lato un'angolo VOH uguale all'altro angolo eſterno *nrq*; e finalmente ne'punti T, H, V alzo delle perpendicolari AB, AC, BC, le quali tagliandoſi formano 'l triangolo cercato ABC: il che io provo in queſto modo.

Se le due linee TO, OH foſſero in retta linea, le perpendicolari BA, CA a queſte linee ſarebbero parallele (*N.* 68.); poichè dunque queſte due linee s' inclinan fra loro, s' inclinano altresì le perpendicolari, e debbono ſegarſi in A: ſi proverà nello ſteſſo modo, che le perpendicolari BC, AC ſopra le rette OV, OH, che formano un'angolo, debbon ſegarſi in C. Ora, ciò poſto.

Eſſendo 'l quadrilatero ATOH compoſto di due triangoli ATO, AHO, i ſuoi quattro angoli equivagliono inſieme a quattro retti (*N.* 97.): ora, i due ATO, AHO ſon retti per la coſtruzione; dunque gli altri due TOH, TAH vagliono due retti: ma l'angolo *nmp* e 'l ſuo conſeguente *nmr* vagliono altresì due retti (*N.* 49.); perciò li due TOH, TAH preſi 'nſieme equivagliono ai due inſieme *nmp*, *nmr*; e da una parte levando l'angolo TOH, e dall'altra l'angolo *nmp* uguale per la coſtruzione a TOH, reſta l'angolo TAH uguale all'angolo *nmr*.

Con ſomigliante diſcorſo ſi troverà, che nel quadrilatero VOHC l'angolo VCH equivale all'angolo *nrm*: ora, gli angoli *nmr*, *nrm* del triangolo *nrm* vagliono inſieme men di due retti, poichè i tre angoli di queſto triangolo non ne vagliono che due; dunque gli angoli TAH, VCH, che ſono uguali ciaſcuno a ciaſcuno agli angoli *nmr*, *nrm*, vagliono inſieme men di due retti; e per conſeguenza i lati BA, BC di detti angoli non ſono paralleli (*N.* 72.), e debbonſi ſegare in un punto B: così, avendo 'l triangolo ABC i due angoli ſopra la baſe AC uguali ai due angoli ſopra la baſe *mr* del triangolo *nmr*, il terzo è uguale al terzo (*N.* 98.), e i due triangoli ſon ſimili; dal che manifeſto appariſce, che'l triangolo ABC è circonſcritto, poichè i ſuoi lati toccano 'l circolo (*N.* 242.).

263. PROPOSIZIONE LXVIII. *Se due corde* AB, CD (Fig. 162.) *ſon*

son parallele, gli archi AC, BD, *contenuti fra queste due corde, sono uguali.*

Dal centro O tiro un diametro RS perpendicolare sopra l' una delle corde AB, ed egli sarà altresì perpendicolare sopra l' altra CD (*N.* 68.); dunque ei sega le corde e'l loro arco in due parti uguali (*N.* 224.); e siccome egli sega eziandio per mezzo la circonferenza, l' arco SBDR è uguale all' arco SACR, e facendo la sottrazione da amendue le parti, cioè dall' una levando gli archi SB e DR, e dall' altra gli archi SA e CR, uguali ciascuno a ciascuno ai due precedenti, resta l' arco BD uguale all' arco AC.

264. COROLLARIO I°. *Se due corde parallele* AB, CD (Fig. 162.) *sono uguali, le corde* AC, BD *degli archi intercetti sono altresì parallele, ed uguali.*

Per l' egualità delle corde AB, CD, uguali sono gli archi AB, CD (*N.* 251.); e per essere queste corde parallele, anche gli archi contenuti AC, BD sono uguali (*N.* 263.): ora, questi quattro archi vagliono insieme l' intera circonferenza; dunque i due AB, BD presi insieme equivagliono alla semicirconferenza, non meno che i due DC, DA; e però l' angolo alla circonferenza ACD, ch' abbraccia i due primi AB, BD, vale la metà della semicirconferenza (*N.* 252.), cioè un' angolo retto: per la medesima ragione egli è altresì retto l' angolo ABD; dunque, perpendicolari essendo le corde AC, BD ciascuna sopra l' una delle parallele, sono perpendicolari anche sopra l' altra (*N.* 68.), e per conseguenza parallele, ed uguali.

265. COROLLARIO II. *Se all' estremità* A, C *d' una corda* AC (Fig. 163.) *s' alzano due perpendicolari indefinite, elle segheranno il circolo ne' punti* B, D; *e le loro parti* BA, DC, *comprese nel circolo, saran due corde parallele, ed uguali.*

Dal centro O tiro OH perpendicolare sopra AC, ed ROS parallela ad AC; le tre linee AB, HO, CD perpendicolari sopra AC sono fra loro parallele (*N.* 68.), e però le rette RS, AC parallele fra queste tre linee sono uguali, ed ugualmente inclinate (*N.* 77.); cioè RS uguale ad AC è perpendicolare sopra le tre linee, e di più è divisa per mezzo in O dalla retta OH, che divide in due parti uguali la corda AC (*N.* 153. 224.): ora, essendo la corda AC minonore del diametro (*N.* 249.), la sua metà AH è minor del raggio; dunque RO, od OS uguale ad AH è minore del raggio; e però le rette AB, CD, che passan per l' estremità R, S delle rette RO, OS, sono nel circolo, e debbon segarlo in B, e D; e sic-

siccome uguali sono le distanze OR, OS del centro a dette linee, ne segue, che AB, CD son due corde parallele, ed uguali.

266. COROLLARIO III. *Se due corde* AB, CD *parallele, ed uguali, son segate da un diametro* POX, *che lor sia obbliquo* (Fig. 163.); *le parti disuguali* BT, TA, *tagliate da questo diametro sopra l'una* AB, *sono uguali ciascuna a ciascuna alle parti* CV, VD, *tagliate dallo stesso diametro sopra l'altra* CD.

Dal centro O tiro la retta RS, ch'è perpendicolare sopra le corde AB, CD, e che per conseguenza le sega ciascuna in due parti uguali (*N.* 224.) ; così, per essere AB = CD, abbiamo BR od RA = DS, o SC, ed OR = OS (*N.*250.): simili essendo i triangoli rettangoli ROT, SOV, per essere l'angolo retto ORT uguale all'angolo retto OSV, l'angolo ROT uguale all'angolo SOV, che gli è opposto al vertice, e'l terzo per conseguenza uguale al terzo, ci danno OR . OS : : TR. VS : ma OR = OS ; dunque TR = VS, e a TR aggiugnendo la metà BR della corda AB, ed a VS la metà SC della corda CD, avremo BT = CV; onde, per essere AB = DC, avremo parimente AB — BT = CD — CV, od AT = VD.

267. PROBLEMA. *Da un punto esterno* R *condurre a un dato circolo una tangente* (Fig. 164.) .

Dal punto R tiro al centro O la retta RO, ch'io divido per mezzo in T; dal punto T preso per centro, con un'apertura di compasso uguale a TR, o TO, descrivo un circolo, che seghi'l dato ABCD in due punti A, C (*N.* 244.) ; da R tiro ai punti A, C le rette RA, RC, che sono l'una e l'altra tangenti del circolo.

Imperocchè, tirando il raggio OC, l'angolo RCO alla circonferenza del circolo RCOA vale la metà dell'arco, o della semicirconferenza OAR, ch'ei abbracoia (*N.* 252.) , ed in conseguenza egli è retto; dunque la retta RC, perpendicolare sopra l'estremità del raggio OC, è tangente del circolo ABCD al punto C (*N.*242.). Si proverà nello stesso modo, che AR è tangente al punto A.

268. COROLLARIO I°. *Da un punto esterno* R (Fig. 164.) *non si possono tirare che due tangenti*.

Qualsivoglia altra linea, che si tirasse fra le tangenti RC, RA, segherebbe necessariamente o'l raggio OC, o'l raggio OA in un punto più vicino al centro O, e passerebbe nel circolo ; che se si tirasse di là dalle tangenti, egli è per se evidente, ch'ella non potrebbe nè segare, nè toccare'l circolo.

269. CO-

269. COROLLARIO II. *Le due tangenti* AC, RA (Fig. 164.), *che tirarsi possono da un medesimo punto esterno* R, *sono fra loro uguali*.

I triangoli rettangoli ROC, ROA hanno l'ipotenusa RO comune, e'l lato OC uguale al lato OA; essi son dunque perfettamente uguali (*N.* 102.), e'l lato RA equivale al lato RC.

270. COROLLARIO III. *Se colla retta* CA *si congiungono i punti del contatto* C, A (Fig. 164.) *di due tangenti uguali tirate da un medesimo punto esterno* R, *questa retta* CA *sarà segata per mezzo e perpendicolarmente dalla secante* ROD *tirata dallo stesso punto* R *pel centro* O.

Uguali essendo le tangenti RC, RA, il punto R della secante RD è ugualmente lontano dall'estremità A, C della retta CA; ed uguali essendo i raggi CO, AO, il punto O della secante è altresì ugualmente lontano dall'estremità stesse A, C; onde la retta ROD è perpendicolare sopra CA (*N.* 58.), e la sega per mezzo.

Quindi ne segue, che date la secante RD, la qual passa per lo centro, e la tangente RC, tirata dallo stesso punto R, puossi ritrovare'l punto A, in cui l'altra tangente tocca'l circolo, tirando dal punto C una retta CA perpendicolare alla secante.

271. PROPOSIZIONE LXIX. *Tirate da un medesimo punto esteriore* R, *una secante* RD *ed una tangente* RC (Fig. 165.), *il rettangolo* RA × RD *della parte esterna per l'intera secante è uguale al quadrato della tangente* RC.

Tiro le rette AC, CD; i rettangoli RAC, RDC han l'angolo R comune, e l'angolo RCA del segmento AC uguale all'angolo RDC nel segmento opposto (*N.* 257.); il terzo angolo è dunque uguale al terzo, e i due triangoli sono simili; onde, paragonando i lati opposti agli angoli uguali, avremo RA. RC::RC. RD: così, facendo'l prodotto degli estremi, e'l quadrato della media, avremo $RA \times RD = \overline{RC}^2$.

272. COROLLARIO I°. *Se da un'istesso punto tiransi al circolo quante si voglia secanti, tutt'i rettangoli delle secanti per le loro parti esterne saranno uguali*.

Ciascuno di questi rettangoli sarà uguale al quadro della tangente; dunque, ec.

273. COROLLARIO II. *La parte esteriore d'una secante e la secante son reciproche alla parte esteriore d'un'altra secante, e alla stessa seconda secante*.

Il rettangolo della prima per la sua parte esterna equivale al rettangolo della seconda per la sua parte esteriore; dunque, ec. (*N.* 185.).

274. COROLLARIO III. *Se da un' istesso punto* R *tirate due secanti si congiungono i punti, ne' quali elle segano il circolo, colle rette* CS, MT (Fig. *166.*), *o colle rette* CT, MS (Fig. *167.*), *s'avranno nella figura 166 due triangoli* CRS, MRT, *le cui basi formeran coi lati degli angoli uguali ciascuno a ciascuno, ma da un verso opposto; cioè, l'angolo formato dalla base* CS *col lato* RS *equivale all' angolo fatto dalla base* TM *col lato* RM, *e l' angolo formato col lato* RC *dalla base* CS *equivale all' angolo formato dalla base* MT *coll' altro lato* RT; *e lo stesso avverrà nella figura 167.*

Nella figura *166*, l'angolo R è comune a' due triangoli RCS, RMT, e l'angolo RCS, fatto dalla corda CS, e dal prolungamento RS della corda ST, vale la metà degli archi CS, ST, o dell'arco CT, (*N.* *256.*), non meno che l'angolo alla circonferenza CMT (*N.* 252.); il terzo angolo dell'uno è dunque uguale al terzo dell'altro, cioè l'angolo RCS è uguale all'angolo RTM.

Nella figura *167*, i due triangoli RCT, RSM hanno l'angolo R comune, e l'angolo RTC alla circonferenza uguale all' angolo RMS parimente alla circonferenza, e ch' abbraccia lo stesso arco CS (*N.* 252.); il terzo RCT è dunque uguale al terzo RSM.

NOTA. Che se dal punto C (*Fig.* *165.*), in cui una tangente RC tocca un circolo, tiransi due rette CA, CD ai punti A, D, in cui una secante RD, che parte da un' istesso punto R, sega 'l circolo, s'avranno altresì due triangoli RAC, RDC, le cui basi AC, CD formeranno co' lati degli angoli uguali ciascuno a ciascuno, ma da un verso opposto; imperocchè l'angolo R è comune, a motivo ch' essendo RCA angolo del segmento CA vale la metà dell'arco CA (*N.* 253.), non meno che l'angolo alla circonferenza ADC, od RDC (*N.* 252.); dunque 'l terzo RAC è uguale al terzo RCD.

275. AVVERTIMENTO. Quando un'angolo è segato da due basi, che coi lati formano degli angoli uguali ciascuno a ciascuno, ma da un verso opposto, queste da alcuni si dicono basi *Antiparallele*: possono le stesse aver tre diverse disposizioni; poichè nella figura *166*, le basi CS, MT non si segano fra i lati dell' angolo MRT; nella figura *167*, le basi CT, SM si segano fra i lati MR, RT, e nella figura *165*, le basi CA, CD partono da un' istesso punto del lato RC.

Nelle disposizioni delle Figure *166*, *167*, il rettangolo della parte RC per l'intero lato RM equivale al rettangolo della parte RS per l'intero lato RT; imperocchè, paragonando i lati omologhi de' triangoli simili RCS, RMT della Figura *166*, o de' triangoli simili RCT, RSM della Figura *167*, s'avrà RS, RC : : RM, RT; dunque RS × RT = RC × RM.

Nella disposizione della Figura *165*, il rettangolo della parte RA per l'intero lato RD è uguale al quadro dell'altro lato RC; imperciocchè il paragone de' lati omologhi de' triangoli simili RAC, RCD ci dà RA, RC : : RC, RD, e però RA × RD = $\overline{RC}^2$.

Per risolvere i seguenti Problemi ci serviremo delle basi antiparallele.

276. PROBLEMA. *Date due linee disuguali* RM, RT (Fig.*168*.) *tagliarle ciascuna in due parti, talmente ch'il prodotto della linea* RM *per l'una delle sue parti sia uguale al prodotto della linea* RT *per l'una di dette parti.*

Faccio un'angolo qualunque, i cui lati sieno le linee RM, RT; tiro la linea MT, e al vertice T del maggiore de' due angoli M, RTM faccio con RT un'angolo RTM uguale all' angolo RMT. Da qualunque punto S preso sopra RT tiro una retta SC, che sia parallela a TH, e che seghi RM in C; e le linee RM, RT sono tagliate in C ed S, come appunto si cercava. Ciò che io provo in questo modo.

Disuguali essendo i lati RM, RT del triangolo RMT, l'angolo RTM, opposto al lato maggiore RM, è maggior dell' angolo RMT, opposto all'altro lato RT. Così egli si può sempre dall'angolo RTM levare un'angolo RTH, uguale all'angolo RMT, col mezzo d'una retta TH, che segherà RM fra le sue estremità R, M; e molto più la retta SC, parallela a TH, segherà la stessa RM infra R, ed M. Ora, ciò posto.

Gli angoli CSR, HTR, che le parallele CS, HT formano dalla stessa banda con la retta RT, sono uguali (*N.* 71.): ora, per la costruzione, l'angolo HTR è uguale all'angolo RMT; onde l' angolo CSR del triangolo RCS è uguale all' angolo RMT del triangolo RMT: ma questi due triangoli hanno ancora l'angolo R comune; perciò 'l terzo angolo RCS equivale al terzo RTM; ed in conseguenza, antiparallele essendo le basi CS, MT, abbiamo RC × RM = RS × RT (*N.* 275.), od RC, RM reciproche ad RS, RT.

Questo

Questo Problema è indeterminato, e quindi puossi risolvere in più modi; imperocchè egli è in nostro arbitrio di condurre la parallela SC da qualsivoglia punto S della retta RT, ed in conseguenza possono le linee RM, RT esser divise ciascuna in due parti in una infinità di modi.

277. PROBLEMA. *Divisa una linea* RM (Fig. *169.*) *in due parti disuguali* RC, CM, *ritrovarne un' altra divisa pure in due parti disuguali, tal che'l rettangolo della parte* RC *per l'intera* RM *sia uguale al rettangolo dell' una delle parti della linea ricercata per tutta essa linea.*

Sopra la parte CM della linea RC descrivo qualsivoglia triangolo isoscele LOM; cioè da' punti C, M presi per centro, e con un' apertura di compasso ad arbitrio, purchè sia maggiore della metà di CM, descrivo due archi, che si seghino in un sol punto O dal medesimo lato (*N.59.*); dal punto O preso per centro, col raggio OC, od OM, descrivo un circolo; e tutte le secanti **RX**, **RT**, ec. tirate dal punto **R** al circolo risolveranno il Problema, poichè il rettangolo di ciascuna d'esse per la sua parte esteriore sarà sempre uguale al rettangolo RC × RM (*N.* 271.).

Questo Problema è indeterminato, non solo perchè infinite secanti tirar si possono al circolo del raggio OC, ma eziandio perchè potendo detto raggio OC esser di qualsivoglia grandezza, purchè ecceda la metà di CM, potran descriversi infiniti circoli differenti, in cui RM sarà sempre secante, e'n cui si potranno altresì dal punto R tirare infinite secanti, le quali tutti soddisferanno alla quistione.

278. PROBLEMA. *Date due linee disuguali* RM, RT(Fig.170.), *di cui l'una* RM *sia divisa in due parti* RC, CM, *segar parimente l'altra* RT *in due parti, tal che il rettangolo dell'una delle sue parti per l'intera* RT *sia uguale al rettangolo della parte* RC *per l'intera* RM.

Faccio qualunque angolo ad arbitrio, i cui lati **RM**, **RT** sieno uguali alle due date linee; conduco la base MT, e al punto C faccio con RC un'angolo uguale all'angolo **RTM**: se'l lato **CS** di detto angolo sega RT in un punto S fra le sue estremità R, T, il Problema è risoluto; ma se detto lato passa per l'estremità **T** di RT, o se sega RT prolungata di là da **T** in **X**, il Problema è impossibile. Ciò che io provo nel seguente modo.

Se'l punto **S** trovasi infra R e T; poichè i triangoli RCS, RMT hanno l'angolo R comune, e l'angolo RCS uguale per la

costruzione all'angolo RTM, il terzo RSC equivale al terzo RMT; e poichè le basi SC, TM sono antiparallele, abbiamo RC, RS :: RT, RM; dunque $RC \times RM = RS \times RT$.

Se 'l angolo RCT è uguale all'angolo RTM, i due triangoli RCT, RTM avranno le lor basi TC, TM antiparallele; e però $RC \times RM = \overline{RT}^2$: ora, siccome qualsivoglia parte di RT è minore di RT, e ch'in conseguenza il rettangolo di RT per l'una di dette parti sarà sempre minore di $RT \times RT$, od $\overline{RT}^2$; egli è evidente, non potersi dividere RT, nel modo che si cercava.

Finalmente, se l'angolo RCX è uguale all'angolo RTM, i triangoli RCX, RTM avranno le basi antiparallele; e però $RC \times RM = RT \times RX$: ora, per essere RX maggiore di RT, avremo $RT \times RX$ maggiore di $RT \times RT$, o di $\overline{RT}^2$; e per conseguenza il Problema è ancora impossibile.

Nel resto, quando 'l Problema è possibile, ei non ha ch'una sola risoluzione; cioè la parte RS della retta RT non può esser nè maggiore, nè minore. Imperocchè 'l prodotto di RT per una parte maggior di RS sarà maggiore del prodotto $RT \times RS = RC \times RM$, e 'l prodotto di RT per una parte minore di RS sarà minor di $RT \times RS = RC \times RM$. Questo Problema è stato risoluto in altro modo sopra (*N.* 187.).

279. PROPOSIZIONE LXX. *Se due corde* AB, CD *d'un' istesso circolo* (Fig. 171.) *si segano, elle si segheranno in parti reciproche; cioè 'l rettangolo* $AH \times HB$ *delle parti* AH, HB *dell'una sarà uguale al rettangolo* $DH \times HC$ *delle parti dell'altra*.

Colle rette AB, CD congiungo l'estremità delle corde: ora, i triangoli AHD, CHB han l'angolo AHD uguale all'angolo CHB, che gli è opposto al vertice, e l'angolo alla circonferenza DAH, o DAB uguale all'angolo alla circonferenza BCH, o BCD (*N.* 252.); il terzo angolo è dunque uguale al terzo, e i due triangoli son simili: così, paragonando i lati omologhi, avremo AH, HD :: HC, HB, ed in conseguenza $AH \times HB = HD \times HC$.

280. PROBLEMA. *A due date linee* AH, HB (Fig. 171.) *ritrovarne due altre, che lor sieno reciproche*.

Descrivo un circolo con un raggio ad arbitrio, uguale, o maggiore della metà delle due linee AH, HB, di cui ne formo una sola retta AB. Col compasso piglio la grandezza della linea AB, e la porto sulla circonferenza del circolo da A in B; dal punto H tira

tiro una corda CHD ad arbitrio, e le due parti CH, HD di essa son le linee cercate. Il che io così provo.

Poichè il raggio del circolo è uguale, o maggior della metà della somma AB delle rette AH, HB, potrà sempre questa somma esser contenuta nella circonferenza; ed ella sarà o diametro, o corda: ora, siccome le due corde AB, CD si segheranno, così noi avremo $AH \times HB = DH \times HC$ (*N.* 279.). Dunque, ec.

Questo Problema può esser risoluto in infiniti modi, non solo perchè infinite corde al circolo tirar si possono dal punto H, le quali tutte soddisferanno alla quistione; ma eziandio perchè posson descriversi infiniti circoli tutti differenti, in cui si può contenere AB, ed ove dal punto H tirarsi potrà un' infinità di differenti corde.

Ma se date le due rette AH, HB e la somma DC dell' altre due; ovvero, il ch' è lo stesso, se date le rette AB e DC si proponesse di segar DC in parti reciproche alle parti AH, HB di AB, il Problema sarebbe assolutamente determinato, e risolverebbesi come sopra (*N.* 187, 278.).

281. PROPOSIZIONE LXXI. *Due corde* AB, CD *d' un medesimo circolo (N.* 171.*) non possono amendue segarsi in due parti uguali.*

Altrimenti, la retta tirata dal centro O al punto H sarebbe perpendicolare sopra la corda AB, perchè sarebbe segata in due parti eguali (*N.*224.); e perciò ella sarebbe altresì perpendicolare sopra la corda CD: una stessa linea sarebbe dunque perpendicolare sopra due linee AB, CD, che si segano; il ch' è impossibile (*N.* 57.).

282. PROPOSIZIONE LXXII. *Se in qualsivoglia quadrilatero, formato da quattro corde d' uno stesso circolo, tiransi le due diagonali; la somma de' rettangoli de' lati opposti equivale al rettangolo delle dette diagonali.*

Diversi casi in questa proposizione si contengono, i quali tutti dimostreremo ad uno ad uno.

Primieramente, se le quattro corde formano un quadrato ABCD (*Fig.* 174.), retto essendo l' angolo alla circonferenza ABC, egli abbraccia la semicirconferenza; e perciò la diagonale AC è un diametro. Per la stessa ragione la diagonale DB è altresì un diametro, e queste due diagonali uguali seganfi nel centro O, e dividono 'l quadro in quattro triangoli rettangoli isosceli, ed uguali.

Ora, simil' essendo il triangolo rettangolo DOC al triangolo rettangolo ABC, per essere egli ancora isoscele, abbiamo DO,

DC

DC : : AB, AC; dunque DO × AC = DC × AB. I triangoli simili BOC, DAC danno altresì BO, BC : : DA, AC; onde BO × AC = BC × DA; e aggiugnendo i membri di quest'equazione ciascuno a ciascuno a quei della precedente, avremo DO × AC + BO × AC=DC × AB + BC × DA: ma DO × AC + BO × AC è lo stesso di DO + BO, o DB moltiplicato per AC; dunque DB × AC = DC × AB + BC × DA.

Secondariamente, se le quattro corde formano un rettangolo ABCD (*Fig.* 173.); la corda BC sarà maggiore della corda AB, perchè altrimenti la figura sarebbe un quadrato, e l'arco BC sarebbe maggiore dell'arco AB; dunque l'angolo alla circonferenza BDC sarebbe maggiore dell' angolo alla circonferenza BDA. Colla corda DC faccio in D un' angolo CDE uguale all' angolo BDA, e d'amendue le parti aggiugnendo l'angolo minore EDB, ho l'angolo CDB uguale all'angolo EDA. I triangoli ADE, BDC son simili, a motivo dell'angolo alla circonferenza DAC uguale all' angolo alla circonferenza DBC poichè abbracciano amendue lo stesso arco DC, e dell' angolo ADE uguale per la costruzione all' angolo BDC; quindi noi abbiamo AE, AD : : BC, BD, e però AE × BD = AD × BC. I triangoli EDC, BAD sono altresì simili, a cagione dell' angolo EDC uguale per la costruzione all'angolo BDA, e dell'angolo alla circonferenza DCE, o DCA uguale all' angolo alla circonferenza ABD, perocchè detti angoli abbracciano lo stesso arco AD. Dunque EC, DC : : AB, BD, il che ci dà EC × BD = DC × AB; ed aggiugnendo i membri di questa a quei della precedente equazione, avremo AE × BD + EC × BD = AD × BC + DC × AB, cioè AC × BD = AD × BC + DC × AB.

In terzo luogo, le quattro corde non possono formare un parallelogrammo, poichè i due archi maggiori sostenuti da' due lati maggiori paralleli sarebbero uguali, e i due minori sostenuti dai due lati minori paralleli sarebbono altresì uguali; ora, siccome questi quattro archi comporrebbero la circonferenza, la somma di un' arco maggiore e d'un minore equivarrebbe alla semicirconferenza: perciò l'angolo alla circonferenza formato da un lato maggiore, e da un minore, abbraccierebbe la semicirconferenza, e sarebbe retto; il ch' è contro l'ipotesi. In quarto luogo, se le corde formano un trapezoide ABCD (*Fig.* 175.), mai n' avverrà, che i quattro angoli sien divisi per mezzo dalle diagonali; imperocchè, se uguali fossero gli angoli DAC, CAB, gli archi CD, CB sarebbono uguali fra loro, e all' arco DA

DA uguale all'arco CB, a cagione delle parallele CD, BA (*N.* 263.); e se di più uguali fossero gli angoli CDB, BDA, l'arco CB sarebbe uguale all'arco BA; e per conseguenza i quattro archi sarebbero uguali, e la figura sarebbe un quadrato. Ora, ciò posto: supponiamo, che l'angolo BDA sia maggiore dell'angolo CDB; col lato AD faccio in D un'angolo ADE uguale all'angolo CDB, e ad entrambe le parti aggiugnendo l'angolo minore EDB, io ho l'angolo CDE uguale all'angolo ADB: così i triangoli ADE, CDB simili, per essere l'angolo ADE uguale all'angolo CDB, e l'angolo EAD uguale all'angolo CBD, mi danno AE, AD :: BC, BD; dal che si deduce $AE \times BD = AD \times BC$: ora, i triangoli CDE, DBA simili, per essere l'angolo CDE uguale all'angolo BDA, e l'angolo ECD uguale all'angolo DBA, mi danno CE, CD :: BA, BD; dal che si deduce $CE \times BD = CD \times BA$: però avremo, come sopra, $AE \times BD + CE \times BD = AD \times BC + CD \times BA$, cioè $AC \times BD = AD \times BC + CD \times BA$.

In fine, se le quattro corde formano un trapezio ABCD (*Fig.* 172.), egli sarà ancor più agevole a dimostrarsi, ch'i quattro angoli non possono esser divisi dalle diagonali ciascuno per mezzo; ed in conseguenza, facendo sempre la stessa costruzione, si troverà ancora $AC \times BD = AD \times BC + CD \times BA$.

283. PROPOSIZIONE LXXIII. *Se da qualsivoglia punto* R *d'una circonferenza* (Fig. 176.) *tirasi una perpendicolare* RM *sopra un diametro* AB, *il quadro di detta perpendicolare equivale al rettangolo delle parti* AM, MB *del diametro, che viene da esso segato.*

Dall'estremità A, B del diametro AB tiro le corde AR, BR; l'angolo alla circonferenza ARB vale la metà della semicirconferenza, che abbraccia (*N.* 252.), e per conseguenza egli è retto; dunque 'l triangolo ARB è rettangolo: ora, la retta RM è tirata perpendicolarmente dal vertice R dell'angolo retto sopra l'ipotenusa; questa perpendicolare è dunque media proporzionale fra i segmenti AM, MB dell'ipotenusa (*N.* 169.): così noi abbiamo AM, MR :: MR, MB; il che ci dà $AM \times MB = \overline{MR}^2$.

284. COROLLARIO I°. *Il quadrato della stessa perpendicolare* RM *equivale al quadrato del raggio* OA, *meno 'l quadro della parte* OM *intercetta fra 'l centro* O, *e 'l punto* M.

Diviso il diametro AB in due parti uguali in O, e in due

due disuguali in M, abbiamo $AM \times MB = \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$ (*N.* 146.): ora, $AM \times MB = \overline{MR}^2$ (*N.* 283.); dunque $\overline{MR}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$.

285. COROLLARIO II. *La corda* AR *è media proporzionale fra 'l segmento* AM *del diametro, e 'l diametro; e l' altra corda* RB *è media proporzionale fra 'l segmento* BM, *e 'l diametro.*

Il triangolo ARC è rettangolo, e la retta RM è tirata dal vertice dell' angolo retto sopra l' ipotenusa **AB**. Dunque, ec. (*N.*170.).

COROLLARIO III. *Onde fra due date linee si può con tal mezzo trovare una media proporzionale in altre due maniere differenti da quella, ch' abbiamo insegnato sopra* (N. 182.).

Cerchisi p. e. una media proporzionale fra le due linee AM, MB; le congiungo insieme in retta linea, e divido la somma AB per mezzo in O; dal punto O preso per centro, col raggio OA, od OB descrivo un semicircolo ORB; e in M alzando la perpendicolare MR, essa sarà la media proporzionale ricercata (*N.*283.).

Che se poi si cercasse una media proporzionale fra AB, e la sua parte AM; descriverei un semicircolo ARB sopra la maggiore AB presa per diametro; dal punto M alzerei la perpendicolare MR; e la corda AR sarebbe la media ricercata (*N.* 285.).

286. PROPOSIZIONE LXXIV. *Le circonferenze di circoli concentrici* ABC, efh (Fig. 177.) *son parallele.*

Da tutt' i punti della circonferenza *efb* (*Fig.* 177.) concepisco delle linee tirate al centro O, e prolungate fino alla circonferenza ABC; onde le distanze de' punti *e*, *f*, ec. dalla circonferenza *efb* alla circonferenza ABC saran le rette *Ae*, *Bf* (*N.* 234.): ora queste rette sono uguali, poichè son le differenze de' raggi uguali AO, BO, ec. a' raggi uguali *eO*, *fO* del circolo minore. Quindi tutt' i punti della circonferenza minore sono equidistanti dalla maggiore; e però queste due circonferenze son parallele.

287. PROPOSIZIONE LXXV. *Tutt' i circoli son simili fra loro.*

Sieno i due circoli ABC, EFH (*Fig.* 177.); li rendo concentrici, cioè dal centro O del maggiore, con un raggio *Oe*, uguale al raggio OE, descrivo una circonferenza *efb*; e però 'l circolo

efb

efb è lo stesso ch' il circolo EFH: così egli s' ha solo a dimostrare, che i due circoli concentrici ABC, *efb* sono simili fra loro.

Concepisco, che la circonferenza ABC sia divisa in infiniti archetti uguali, come AB, e da' punti di divisione A, B, ec. tirando dei raggi al centro, essi segano la circonferenza *efb* in uno stesso numero di archetti tutti fra loro uguali, come *ef*; nell' uno e nell' altro circolo tiro le corde degli archi, e per l' egualità degli stessi archi tutte le corde del primo circolo sono fra loro uguali, non meno che quelle del secondo; e quindi nel circolo maggiore tutt' i triangoletti isosceli AOB, ec. formati dai raggi e dalle corde, sono fra loro uguali (*N.* 100.), non meno ch' i triangoletti *e*OF, ec. formati dai raggi e dalle corde del minore; e ciascun triangolo AOB del maggiore è simile a ciascun triangolo *e*OF del minore per l' angolo O comune, e le basi parallele AB, *ef*: così, ne' due circoli abbiamo due poligoni regolari d' un' istesso numero infinito di lati, e però simili fra loro; ma per l' infinita picciolezza degli archi AB, ec. del circolo maggiore, le corde di questi archi sono infinitamente prossime, e fra loro talmente si confondono, che si posson prendere le corde per gli archi medesimi. Lo stesso dicasi del circolo minore. Possiamo dunque pigliare i poligoni per gli stessi circoli. Ora ne' poligoni simili i circuiti sono tra loro come i raggi (*N.* 165.); onde le circonferenze ABC, *efb*, le quali sono in tal caso le medesime ch' i circuiti de' poligoni, son fra loro come i raggi AO, *eo*; ed in conseguenza i circoli sono simili; e così degli altri.

288. COROLLARIO I°. *Se a due, o più circoli disuguali tiransi delle tangenti* MN, RS (Fig. 177.), *i punti del contatto* A, *e son proporzionali alle circonferenze, od a' raggi.*

I lati de' poligoni simili d' un' infinito numero di lati, che compongono i due circoli, sono infinitamente piccioli; dunque ciascuno di questi lati, o ciascun' arco è un' punto della sua circonferenza. Ora, i lati de' poligoni simili sono tra essi come i lor circuiti, o come i loro raggi; onde anche i punti A, *e* delle circonferenze sono altresì fra loro come i lor raggi.

NOTA. Non potrebbesi ciò concepire, se con Euclide si dicesse, che le linee non hanno veruna larghezza; ma se alcuna loro ne diamo, chiaramente si scorge, ch' i punti delle linee, tirate da tutt' i punti della circonferenza maggiore al centro, vie più avanzano sopra i punti delle linee vicine, a misura, ch' esse s' avvicinano al centro, e ch' in conseguenza, rispetto a questi avvanza-

menti, i punti, ne' quali una piccola circonferenza è segata, saran minori.

289. COROLLARIO II. *I segmenti, li cui archi comprendono un'egual numero di gradi delle lor circonferenze, sono simili tra loro; e lo stesso dicasi de' settori.*

Sieno i segmenti ABC, *abc* (*Fig.* 178.), il cui centro comune è al punto O. Egli è evidente, che gli archi ABC, *abc* saranno fra essi come le loro circonferenze, o come i lor raggi (*N.* 287.), contenendo essi un'ugual numero di gradi delle lor circonferenze. Ora, poichè i triangoli ACO, *ac*O hanno l'angolo O comune, e le basi parallele, son simili; e ci danno AC, *ac* : : AO, *a*O; dunque le corde AC, *ac* sono fra loro come gli archi ABC, *abc*, ed in conseguenza le linee, che compongono i segmenti, son proporzionali; onde altro non ci resta a far vedere, se non se essere uguali gli angoli formati da queste linee, cioè gli angoli mistilinei formati dalle corde cogli archi. E perciò:

Si concepisca, che l'arco ABC sia diviso in infiniti archetti, i quali sieno tutti eguali, e che da' punti di divisione sieno tirati al centro de' raggi, i quali divideranno l'arco *abc* in uno stesso numero d'archi uguali, ciascuno de' quali tanto varrà per rapporto alle loro circonferenze, quanto ogni archetto dell'arco ABC per rapporto alla sua. Si concepisca eziandio, che da' punti A, *a* sieno tirate delle rette AH, AR, AB, ec. *ab*, *ar*, *ab*, ec. tutti gli angoli, che queste linee formeran tra loro, e ch' avranno i loro vertici alle circonferenze ne' punti A, *a*, saranno uguali, perocchè abbracciano archi dello stesso valore. Così tutti gli angoli CAH, HAR, ec. compresi nel segmento ABC, saranno uguali a tutti gli angoli *cab*, *bar*, ec. compresi nel segmento *abc*: ma tutti gli angoli CAH, HAR, ec. compongono insieme l'angolo mistilineo CAB, e tutti gli angoli *cab*, *bar*, ec. compongono l'angolo mistilineo *cab*; dunque l'angolo mistilineo CAB equivale al mistilineo *cab*; e lo stesso si proverà degli altri angoli mistilinei ACB, *acb*; donde ne segue, ch' avendo i segmenti ABC, *abc* proporzionali i lati, ed uguali gli angoli, son simili.

Ne' triangoli simili AOC, *a*O*c*, l'angolo OAC è uguale all'anlo O*ac*; dunque all'angolo mistilineo CAB aggiugnendo l'angolo OAC, e al mistilineo *cab* l'angolo OA*c*, uguale sarà l'angolo mistilineo OAB del settore OAC all'angolo mistilineo O*ab* del settore O*ac*; e per la medesima ragione l'altro mistilineo OCB è uguale all' angolo mistilineo O*cb*: ora, gli archi ed i raggi di

di questi settori sono proporzionali. Detti settori son dunque simili.

290. COROLLARIO III. *Se a due circoli disuguali* (Fig. 179.) *tiransi due tangenti* MN, mn; *gli angoli mistilinei* NAT, nat *formati dalle tangenti e dalle circoferenze sono uguali*.

Da' punti del contatto A, *a* tiro i diametri AB, *ab*; gli angoli BAN, *ban* sono retti (*N.* 240.), e però uguali. Ora, poichè i semicircoli ATB, *atb* son de' segmenti simili (*N.* 289.), gli angoli mistilinei BAT, *bat* sono uguali; onde, dall'angolo BAN togliendo BAT, e dall'angolo *ban* l'angolo *bat*, resta NAT uguale all'angolo *nat*.

291. COROLLARIO IV. *Se dunque più circoli disuguali toccano una stessa linea* MN (Fig. 180.) *in un punto* A, *tutti gli angoli mistilinei, formati da detta tangente colle circonferenze, sono tra loro uguali*.

Perchè i circoli toccano la stessa linea MN nel punto A, la medesima perpendicolare AS alzata sul punto A passerà per tutt' i centri (*N.* 242.), e segherà tutt' i circoli in due parti uguali. Così lo stesso si dimostrerà che nel Corollario precedente.

NOTA. Ciò sarebbe impossibile, se i circoli toccassero la retta MN in una parte uguale. Ma siccome i punti de' circoli maggiori sono più grandi ch' i punti de' minori; così n' avviene, che le circonferenze de' circoli maggiori non abbandonano sì tosto la retta MN come le minori, e che per conseguenza gli angoli mistilinei, formati da esse con la tangente, sono un pò a lato gli uni agli altri, come si può agevolmente concepire colla sola inspezione della Figura 181, la quale rappresenta più poligoni regolari simili, ma disuguali, che toccano una stessa retta.

Nè convien dire, che quindi n' avverrà, ch' un circolo possa toccare una retta in più d' un punto; imperocchè, quantunque un circolo maggiore tocchi una retta in una parte più grande di quello faccia un minore, tuttavolta questo circolo maggiore non la tocca che coll' uno de' suoi punti, siccome fa anche il minore, il quale non la tocca che con l' uno de' suoi. Ovvero in altro modo:

Si concepisca, che molti poligoni regolari simili, ma disuguali, abbiano tutti uno stesso angolo comune A (*Fig.* 182.), e che all' estremità della linea AB, la qual divide quest' angolo per mezzo, e passa pe' loro centri, s' alzi una perpendicolare MN;

 egli

egli è evidente, che questa perpendicolare toccherà tutt' i poligoni, e che tutti gli angoli, ch' essa formerà con essi loro, saranno uguali: ciò dicasi di tutt' i poligoni simili, il cui numero di lati sia maggiore, o minore; e lo stesso in conseguenza anche de' circoli.

Con questa seconda spiegazione una difficoltà agevolmente si risolve, che ci potrebbe esser fatta; ed è: che se uguali sono tutti gli angoli mistilinei interni de' semicircoli, che toccano in A la retta MN (*Fig.* 180.), dovranno necessariamente esser nulli gli angoli curvilinei formati in A dalle circonferenze, la qual cosa non ha opposizione veruna; poichè scorgesi nella Figura 182, ch' i circuiti de' poligoni non formano angoli tra loro al punto A, quantunque ne facciano dappoi, mercè che i lati dell' angolo fatto in A cangiano in seguito di direzione; e lo stesso avverrà pure de' circoli.

L' angolo mistilineo formato dalla tangente e dalle circonferenze è nullo al punto A (*Fig.* 180.); imperocchè tutt' i piccioli lati, mediante cui i circoli toccano la retta MN, cadono gli uni sopra gli altri al punto A, e poi non formano angoli, se non perchè vengono a cangiar di direzione. Ciò chiaro apparisce dalla Figura 181: ma si può in oltre confermare una tal verità col seguente ragionamento:

Fra la perpendicolare AS e la tangente non può dal punto A tirarsi veruna retta, che non seghi tutte le circonferenze; altrimenti, dall' istesso punto A si potrebbero tirare due tangenti; il ch' è impossibile (*N.* 241.). Ora puossi in A formare con AN un' infinità d' angoli sempre minori in infinito, fino a far totalmente svanire l' angolo; ed è visibile, ch' il minore di detti angoli sarebbe ancora maggior dell' angolo mistilineo, poichè segherebbe le circonferenze; dunque l' angolo mistilineo in A esser dee minore di quanto evvi di più picciolo, e in conseguenza nullo.

Proprietà del Circolo utili per l' intelligenza delle Sezioni Coniche.

292. PROPOSIZIONE LXXVI. *Tirate da un medesimo punto esterno* A (Fig. 183.) *due tangenti* AB, AC *con la secante* AD, *che passa pel centro* O, *e colla retta* CB, *che congiugne i punti del contatto; dico, che sempre s' avrà* OR. OS : : OS. OA; *cioè la distanza dal centro* O *al punto* R, *in cui la retta* CB *taglia la se-*

cante

cante AD, *è al raggio, come 'l raggio alla distanza* OA *del centro* O *al punto esterno* A.

Da O tiro al punto del contatto il raggio OB; retto essendo l' angolo OBA (*N.* 240.), il triangolo OBA è rettangolo; e poichè BC taglia perpendicolarmente la secante AD (*N.* 270.), la retta BR è una perpendicolare tirata dal vertice A dell' angolo retto sopra l' ipotenusa AO; dunque 'l lato OB del triangolo rettangolo OBA è medio proporzionale fra 'l segmento minore RO, e l' intera ipotenusa (*N.* 170.); e per conseguente abbiamo OR. OB : : OB. OA: ma il raggio OB è uguale al raggio OS; onde OR. OS : : OS. OA.

293. AVVERTIMENTO. Siccome la perpendicolare tirata dal punto del contatto sopra la secante AD, che passa pel centro, passa per l' altro punto del contatto C dell' altra tangente; in seguito non porrò nelle Figure ch' una sola tangente, e in vece di dire: *tirate due tangenti con la secante, ec. e colla retta, che congiugne i punti del contatto, dirò per maggior brevità: date la tangente* AB, *la secante* AD, *che passa pel centro, e la perpendicolare* BR, ec.

294. PROPOSIZIONE LXXVII. *Date la tangente* AB, *la secante* AD, *che passa pel centro, e la perpendicolare* BR, *s' avrà sempre* AS. AR : : AO. AD.

Tiro il raggio OB, e poichè nel triangolo rettangolo OBA la retta BR tirata dall' angolo retto è perpendicolare sopra l' ipotenusa AO, il lato AB è medio proporzionale fra 'l segmento AR dell' ipotenusa, e l' intera ipotenusa AO: così AR. AB :: AB. AO;

il che ci dà $\overline{AB}^2 = AR \times AO$: ma per la proprietà della secante

abbiamo $\overline{AB}^2 = AS \times AD$ (*N.* 271.); dunque $AS \times AD = AR \times AO$; il che ci dà AS. AR : : AO. AD.

295. PROPOSIZIONE LXXVIII. *Posto sempre, che sieno date la tangente* AB (Fig. 184.), *la secante* AD, *che passa pel centro, e la perpendicolare* BR; *dico* 1°. *Che se all' estremità* S, D, *e al centro* O *del diametro s' alzano tre perpendicolari* SH, OM; DN, *che vadano a terminare sopra la tangente* AB *prolungata ne' punti* H, M, N, *le quattro linee* SH, RB, OM, DN *sono in proporzione.* 2°. *Ch' il rettangolo delle due perpendicolari, o tangenti* SH, DN *equivale al quadrato del raggio.*

Perpendicolari essendo le quattro linee SH, RB, OM; DN sopra

pra la fecante AD, effe fono fra loro parallele; e per confeguenza i triangoli ASH, ARB, AOM, ADN, che hanno l' angolo A comune, e le bafi parallele, fon fimili fra loro, e le bafi di effi fono tra loro come i lor lati AS, AR, AO, AD: ma per la precedente propofizione abbiamo AS . AR : : AO . AD; dunque SH . RB : : OM . DN. Il che doveafi 1°. dimoftrare.

Dal punto B del contatto abbaffo BP perpendicolare fopra MO, ch'io prolungo dall'altro lato in V. La retta MV è una fecante, che paffa pel centro, MB è una tangente tirata dal medefimo punto M, e la retta BP è una perpendicolare tirata dal punto del contatto; onde abbiamo OP . OE : : OE . OM : ma per le parallele abbiamo OP = RB; dunque RB . OE : : OE . OM; e

però $RB \times OM = \overrightarrow{OE}$: ora fi è trovato SH . RB : : OM . DN,

il che ci dà $RB \times OM = SH \times DN$; dunque $SH \times DN = \overrightarrow{OE}$.

296. PROPOSIZIONE LXXIX. *Pofto ancora, che fieno date la tangente* AB (Fig. 185. *186.*), *la fecante* AD, *che paffa pel centro, e la perpendicolare* BR; *dico, che la fecante* AD, *e tutte l'altre, le quali tirar fi poffono da un' ifteffo punto* A, *fon divife armonicamente in tre parti dalla circonferenza, e dalla retta* BR; *cioè, ch' in ogni fecante, la parte efteriore è alla fua parte interna minore, come l' intera fecante è all' altra parte interiore.*

Dall'eftremità S, D del diametro, tiro delle tangenti SH, DN (Fig. *186.*), che vadano a terminare fopra la tangente AB prolungata in N: così, effendo quefte tangenti fra loro parallele, poichè fon perpendicolari fopra'l diametro, i triangoli ASH, ADN fon fimili, e ci danno AH . SH : : AN . DN : ma effendo le tangenti SH, HB tirate da un'ifteffo punto, fono uguali, non meno che le tangenti DN, BN; ponendo dunque nella proporzione trovata la retta HB, in vece della fua uguale SH, e la retta BN, in vece della fua uguale DN, avremo AH . HB : : AN . BN: ma, per le parallele SH, RB, DN, la retta AD è divifa da quefte parallele nella medefima ragione della retta AD; e però AS . SR : : AD . RD; il che doveafi 1°. dimoftrare.

Ora piglifi una fecante AV (*Fig.* 185.), che non paffi pel centro; farà quefta tagliata in qualche punto L dalla perpendicolare BRH; e trattafi di provare, che AP . PL : : AV . LV, e che in confeguenza AV è divifa in tre parti armonicamente: quindi fopra la parte interiore VP prefa per diametro defcrivo un circolo

colo VTPQ; dal punto L tiro una corda TQ perpendicolare allo stesso diametro, e da T conduco al punto A la retta TA: s' io dimostro essere TA tangente del circolo TPQV, egli è evidente, ch' essendo AV una secante, la quale passa pel centro di detto circolo, e TL una perpendicolare tirata dal punto del contatto T, avremo, come s' è veduto nel primo caso, AP, PL :: AV, LV: vegniamo dunque alla dimostrazione.

Nel triangolo rettangolo ALR abbiamo $\overline{AL}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2$ (*N.* 71.), e 'l triangolo rettangolo ATL ci dà $\overline{AT}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{TL}^2$; ponendo dunque in questa seconda equazione il valore di $\overline{AL}^2$; avremo $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2 + \overline{TL}^2$: ora, essendo TL perpendicolare al diametro VP, abbiamo $\overline{TL}^2 = VL \times LP$ (*N.*283.); e poichè VP, HB son due corde del circolo maggiore SBD, che si segano in L, abbiamo $VL \times LP = HL \times LB$ (*N.* 275.): onde $\overline{TL}^2 = HL \times LB$; e ponendo il valore di $\overline{TL}^2$ in $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2 + \overline{TL}^2$, avremo $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{LR}^2 + HL \times LB$: ma divisa essendo la linea HB per mezzo in R, ed altrimenti in L, abbiamo $HL \times LB + \overline{LR}^2 = \overline{HR}^2$, od $\overline{RB}^2$; dunque $\overline{AT}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RB}^2$: ora, nel triangolo ARB abbiamo $\overline{AB}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RB}^2$; perciò $\overline{AT}^2 = \overline{AB}^2$; e siccome per la proprietà della tangente AB e delle secanti abbiamo $AP \times AV = \overline{AB}^2$, così avremo $AP \times AV = \overline{AT}^2$; cioè nel circolo VTPQ il rettangolo della parte esteriore AP della secante AV per detta secante è uguale al quadro della retta AT tirata dallo stesso punto A alla circonferenza del circolo: ma in questo medesimo circolo il rettangolo $AP \times AV$ equivale al quadro della tangente tirata dal punto A dalla banda del punto T; onde il quadrato di questa tangente è uguale al quadro $\overline{AT}^2$; e però la tangente e la retta AT sono uguali: ora, dall' istesso punto A non si possono alla circonferenza VTPQ tirare dal medesimo lato due differenti linee, le quali sieno uguali (*N.*235.237.); dunque AT è la tangente, che dal punto A si tirerebbe alla circonferenza VTPQ.

297.

297. COROLLARIO. *Se due, o più secanti* AV, ec. (Fig. 187.), *tirate da un' istesso punto* A, *son divise armonicamente dalla circonferenza, e da una retta* BH *perpendicolare sopra la secante, che passa pel centro; la tangente tirata all' una, o all' altra dell' estremità della corda* BH *passerà pel punto* A.

Se vogliamo, che la tangente tirata dal punto B non passi pel punto A; da detto punto A tiro una tangente, ch' in conseguenza toccherà il circolo in un punto P differente dal punto B, poichè due tangenti non possono toccare il circolo in un medesimo punto (*N.* 241.); da P tiro PQ perpendicolare sopra la secante AD, che passa pel centro, e che taglia la secante AV in N; così, per la precedente proposizione, la secante AV sarà divisa armonicamente dalla circonferenza e dalla retta PQ, e le sue tre parti saranno AF, FN, NV: ma per ipotesi la stessa secante AV è divisa armonicamente dalla circonferenza e dalla retta BH, e le sue tre parti sono AF, FL, LV, la cui prima AF è la stessa che la prima AF delle tre precedenti; le due ultime FL, LV debbono dunque essere uguali ciascuna a ciascuna alle due ultime FN, NV (*N.*206.); e però FL equivaler dee ad FN, e'l punto del contatto P dee cadere sul punto del contatto B.

298. PROPOSIZIONE LXXX. *Posto ancora, che date sieno la tangente* AB (Fig. 188.), *la secante* AD, *che passa pel centro, e la perpendicolare* BRH: *dico, che se da qualsivoglia punto* M *preso sopra la circonferenza tirisi una corda* MN, *che passi pel punto* R, *in cui la perpendicolare* BR *taglia la secante* AD; *e che, se dopo aver dall' estremità* M, N *di detta corda tirate due corde* MT, NV *parallele a* BR, *si conduchino le rette* VM, NT *per l' estremità delle corde; le rette* VM, NT *prolungate di là dal circolo saran due secanti uguali, che passeranno per lo punto* A, *e che saran divise armonicamente dalla circonferenza, e dalla perpendicolare* BH.

Parallele essendo le corde MT, VN, gli archi MV, TN contenuti tra queste due corde sono uguali (*N.* 263.), e a ciascuno d' essi aggiugnendo l'arco MT, i due archi VMT, MTN sono uguali, non meno che gli angoli alla circonferenza MVN, TNV, i quali abbracciano detti archi: ora, non passando la corda MN per lo centro O del circolo, ed in sequela dividendo la circonferenza in due parti disuguali, l'angolo MTN del segmento minore vale meno d' una semicirconferenze, e l' angolo MVN, che ne vale la metà, è acuto, non meno ch' il suo uguale TNV; così le

due

due linee MV, TN, facendo sopra la retta VN gli angoli interni opposti minori insieme di due retti, non sono parallele (*N.* 72.), e prolungate dal lato di A, debbono con la base VN formare un triangolo isoscele, il cui vertice sarà sopra qualche punto della perpendicolare AQ, che sega per mezzo la base VN (*N.* 107.).

Ma siccome non ancora si sà, se'l punto, in cui le rette MV, NT prolungate segano la perpendicolare AQ, sia lo stesso, ch' il punto A, lo chiameremo $= x$, ovvunque egli sia. Essendo il triangolo MNV segato dalla retta BH parallela alla sua base, ci dà MR. RN :: ML. LV (*N.* 158.); e ne' triangoli simili MaR, NQR abbiamo MR. RN :: Ma. NQ, od VQ; dunque ML. LV :: Ma. VQ: ma i triangoli simili xMA, xVQ ci danno Ma. VQ :: xM. xV; dunque xM . xV :: ML . LV, od xM . ML :: xV . LV, e però la retta xV è divisa armonicamente dalla circonferenza e dalla retta BH; ed egli è per se manifesto, che per le parallele MT, HB, VN l'altro lato xN del triangolo isoscele MxN è altresì diviso armonicamente dalla circonferenza, e dalla retta AB: così, essendo le due linee Vx, Nx due secanti, che partono da un' istesso punto x, e che son divise armonicamente dalla circonferenza, e dalla retta BH perpendicolare sopra la secante AD, che passa pel centro, la tangente tirata dal punto B passar dee pel punto x (*N.* 297.), il quale non differisce da A, poichè non può la tangente BA, che sega AD in A, segarla in un'altro punto.

299. COROLLARIO I°. *Se nel trapezoide* MTNV (Fig.188.), *formato dalle quattro corde* MT, TN, VN, MV, *tirasi l'altra diagonale* VT, *ella passerà ancora pel punto* R.

Imperocchè, uguali essendo gli angoli MNV, TVN a motivo degli archi uguali MV, TN, le due diagonali segandosi fanno un triangolo isoscele, il cui vertice esser dee sopra la perpendicolare AR; che sega per mezzo la base VN: ora la diagonale MN passa pel punto R di detta perpendicolare, e non la sega ch'in un punto; dunque la diagonale VT passar dee per lo stesso punto.

300. COROLLARIO II. *Se da un' istesso punto* A (Fig.188.), *da cui partono la tangente* AB, *la secante* AD, ec. *tiransi due secanti uguali* AV, AN, *e che colle diagonali* MN, VT *si congiungano i quattro punti, in cui elle segano la circonferenza, dette due diagonali si segheranno nel punto R della perpendicolare* BH.

Le secanti AV, AN ci danno AV × AM = AN × AT: ma per ipotesi AV = AN; se dunque da una parte si divide per AV, e dall'altra per AN, avremo AM = AT; donde ne segue, che

le rette VN, MT, tirate dall'estremità delle secanti AV, AN e delle loro parti esterne, son perpendicolari sopra AD (*N.* 236. 238.), e per conseguenza parallele a BH: così, uguali essendo gli archi VM, TN, contenuti fra le parallele MT, VN (*N.*263.), sono altresì uguali gli angoli alla circonferenza MNV, TVN, ch' insistono a detti archi; perciò 'l triangolo, che le diagonali MN, TV, segandosi, formano dal lato di VN, è isoscele, e'l suo vertice esser dee sopra la perpendicolare AD, che sega per mezzo la base VN (*N.* 107.).

Ma perchè ancora non si sà, se'l punto, in cui queste due diagonali si segano sopra AD, sia R, e' chiamisi = z; i triangoli simili MAz, NQz ci danno Mz. zN : : M*a*. NQ, o QV, e a cagione de' triangoli simili MA*a*, VAQ avremo M*a*. QV : : MA. VA; perciò Mz. zN : : MA. VA: ora, essendo la secante AV divisa armonicamente dalla circonferenza e dalla retta BH, abbiamo MA. ML : : AV. LV, o MA. VA :: ML. LV; dunque Mz. zN : : ML. LV: così nel triangolo MNV, essendo i lati MV, MN segati proporzionalmente a' punti L, z, la retta Lz, tirata da questi due punti, è parallela alla base VN (*N.* 158.) : ma LR, od HB lo è altresì ad VN, e dal punto L non si può tirare ch' una sola parallela a una medesima linea VN; onde le parallele LR ed Lz non sono ch' una sola e medesima linea, e'l punto z è lo stesso ch' il punto R.

301. COROLLARIO III. *Se dunque da un' istesso punto son tirate due secanti uguali* AV, AN (Fig. 188.), *e che dopo condotte le diagonali* MN, TV *pel punto* R, *in cui elle si segano, tirisi una retta* HB *parallela alla retta* VN, *che passa per l'estremità delle secanti; li punti* H, B *della retta* HB *saranno i punti del contatto delle due tangenti uguali, che tirar si possono dal punto* A. Imperocchè si proverà come sopra, che le due secanti AV, AN son divise armonicamente dal circolo, e dalla retta HB, ec.

302. PROPOSIZIONE LXXXI. *Posto ancora, che siene date la tangente* AB (Fig. 189.), *la secante* AD, *che passa pel centro, e la perpendicolare* BRH: *dico, che se dal punto* A *tirasi una retta indefinita* XZ *parallela alla perpendicolare* BRH, *e che da qualsivoglia punto* C *preso sopra questa parallela tirisi una secante* CN, *che passi pel punto* R; *la retta* CN *sarà divisa armonicamente dalla circonferenza, e dalla retta* BH.

Da' punti M, N tiro le rette MT, NV parallele, e dai punti

ti M, V, N, T tiro le rette VA, NA, che saran due secanti uguali, le quali passeranno pel punto A, e saran divise armonicamente dalla circonferenza e dalla perpendicolare HB (*N.* 298.), ovvero, il ch'è già lo stesso, dalle rette MT, HB: così nello spazio parallelo XZVN, essendo la secante AV divisa armonicamente dalle rette MT, HB parallele alle parallele XZ, VN, la retta CN compresa in questo stesso spazio esser dee segata nella medesima ragione dalle sopraddette parallele MT, HB (*N.* 153.); e per conseguenza abbiamo CM. MR : : CN. RN.

303. COROLLARIO. *Se da qualsivoglia punto* C *della retta* XZ (Fig. 190.) *parallela a* BR *tiransi due tangenti* CP, CQ, *e la retta* PQ, *che congiugne i loro punti del contatto; questa retta* PQ *passa pel punto* R.

Imperocchè tirando la secante CN, che passa pel punto R, ella è segata armonicamente in M, R, N (*N.* 302.), e nelle sue tre parti CM, MR, RN: ora se vogliamo, che la retta PQ non passi per lo stesso punto R, converrà dunque, ch'ella seghi la secante CN in qualsivoglia altro punto *x*; e siccome PQ non differisce dalla perpendicolare, la quale tirerebbesi dal punto del contatto P sopra la secante, che partendo dal punto C passerebbe pel centro (*N.* 293.), la retta sarebbe altresì divisa armonicamente ne' punti C, *x*, N, e le sue tre parti sarebbero CM, M*x*, *x*N: ma la prima CM di queste tre parti è la stessa che la prima CM delle tre precedenti; onde le due altre M*x*, *x*N debbono essere uguali ciascuna a ciascuna all' altre due MR, RN, e per conseguenza i punti R ed *x* non possono differire, e la retta PQ passar dee pel punto R.

NOTA. Ella è agevol cosa provare l'opposto di questa Proposizione; cioè, *che se pel punto* R *tirasi qualsivoglia corda* QP, *e che dalle sue estremità* P, Q *si tirino due tangenti* QC, PC, *elle si segheranno in un punto* C *della linea* XZ.

Imperocchè se si segassero in un punto *a* di quà, o di là da RZ; la secante *a*N tirata dal punto *a* pel punto R sarebbe divisa armonicamente dalla circonferenza, e dalla retta PQ, che congiugne i punti del contatto P, Q; e le sue tre parti sarebbero *a*M, MR, RN. Ora, siccome questa stessa secante *a*N taglierebbe XZ in qualche punto C, e poichè la linea CN sarebbe altresì divisa armonicamente in tre parti CM, MR, RN, avremmo due linee *a*N, CN divis' entrambe armonicamente, ed aventi due parti MR, RN comuni, e di cui sarebbero non ostante disuguali le due ter-

ze *a*M, CM, il ch'è impossibile (*N*.207.); a fine dunque ch'*a*N sia divisa armonicamente, in modo che MR, RN sieno due delle sue parti, conviene per necessità, che *a*M sia uguale a CM, e ch' i punti *a*, C non sieno ch'uno stesso punto della linea XZ.

304. PROPOSIZIONE LXXXII. *Posto ancora, che date sieno la tangente* AB (Fig. 191.), *la secante* AD, *che passa pel centro, e la perpendicolare* BRH: *dico, che se tiransi due secanti disuguali* AV, AN, *e che colle rette* TM, EL, NV *si congiungano i lor punti di divisione; prolungate queste rette, elle si segheranno in un medesimo punto sopra la perpendicolare* BH *prolungata dall'una, e dall'altra parte*.

Le linee TM, EL, NV non sono fra loro parallele; altrimenti le due TM, NV sarebbero perpendicolari sopra la retta AD, che passa pel centro, essendo EL perpendicolare sopra AD; donde n'avverrebbe, che TM, NV sarebbero divise ciascheduna ugualmente da AD non meno ch'i loro archi; e ch'in conseguenza le secanti AV, AN sarebbono uguali (*N*. 236.); il ch'è contro l'ipotesi: ora posto questo.

Essendo le secanti AN, AV divise armonicamente dalla circonferenza e dalla retta BH, ed avendo esse un punto comune A, le rette TM, EL, NV, che congiungono i loro altri punti di divisione, o son fra loro parallele, o prolungate debbono tutte segarsi in un medesimo punto (*N*. 211.): ora noi abbiamo già dimostrato, ch'esse non sono parallele; onde si segano nel medesimo punto: ma ciò è impossibile, quando le due TM, NV prolungate non seghino in un medesimo punto la linea EL altresì prolungata; dunque, ec.

305. PROPOSIZIONE LXXXIII. *Posto ancora, che sieno date la tangente* AB (Fig. 192.), *la secante* AD, *che passa pel centro, e la perpendicolare* BH: *dico, che se dall'una e dall'altra parte si prolunga* BH, *e che da qualsivoglia punto* I *de' suoi prolungamenti si tirino due tangenti* IM, IV; *prolungata la linea* VM, *che congiugne i punti del contatto, dovrà passare pel punto* A.

Da A tiro un'altra secante APQ; da I pel punto P, in cui questa secante divide 'l circolo, tiro la retta IPT, ch'è altresì una secante; alla fine da A tiro pel punto T una secante ATN. Le due secanti AQ, AN son divise armonicamente dal circolo, e dalla retta BH: ma siccome esse hanno un punto A comune, e che le due linee TP, BH, le quali congiungono quattro de' loro punti di divisione, si segano in un punto I, la retta NQ, che

con-

congiugne i loro termini N, Q, passar dee pel medesimo punto I; ciò posto: Le secanti IT, IN sono armonicamente divise dal circolo, e dalla retta MV, la quale congiugne i punti del contatto delle tangenti IM, IV, che partono dal medesimo punto I (*N.316.*); e le rette PQ, NT, che passano per quattro de' loro punti, si segano in A; dunque la retta VM, che passa per i punti V, M, passa ancora pel punto A.

NOTA. Si può agevolmente provare l'opposto di questa proposizione; cioè, *che se da' punti* M, V *della parte interiore* MV *d' una secante* VA, *che passa per* A, *tiransi due tangenti*, *elle si segheranno sopra la perpendicolare* BH *prolungata*.

Imperocchè supponiamo per un sol momento, ch'il punto I, in cui si segano le tangenti VI, MI, non sia sopra 'l prolungamento di BH; da detto punto I tiro una secante IPT, che sega 'l circolo in P e T, e ch'è divisa armonicamente dalla circonferenza, e dalla retta VM, che congiugne i punti del contatto V, M. Da A tiro per i punti P e T altre due secanti AQ, AN, e dall' estremità N dell'ultima AN io tiro la retta NI; le due secanti IT, IN sono armonicamente divise dal circolo, e dalla retta VMA, che congiugne i punti del contatto V, M delle tangenti IM, IV tirate dallo stesso punto I; e siccome le rette VMA, NTA, che congiungono quattro punti di divisione di dette due secanti IT, IN, passano per A, la linea QP, che congiugne i punti Q, P, passa altresì per lo stesso punto A (*N.* 211.): così le rette APQ, ATN, essendo due secanti, che partono dal punto A, son divise armonicamente dalla circonferenza, e dalla retta BR; e poichè le linee TP, NQ, che congiungono quattro de' loro punti, passano per I, la linea BH, che congiugne due altri de' loro punti, passar dee parimente pel punto I; ed in conseguenza 'l punto I, in cui si segano le due tangenti MI, VI, non può esser fuori della retta DH prolungata, come si supporrebbe.

306. PROPOSIZIONE LXXXIV. *Posto ancora, che date sieno la tangente* AB (Fig. 193. 194.), *la secante* AD, *che passa pel centro, e la perpendicolare* BH: *dico, che se da qualsivoglia punto* M *della parte esteriore* AS *della secante*, *prolungata* p. e. *di là dal punto* A, *tirasi una retta* MP *parallela alla tangente* AB, *e che vada a terminare sopra la retta* BH, *prolungata, se sia d' uopo, di là dal punto* B; *il quadro di questa retta* PM *sarà sempre maggiore del rettangolo della secante* MD, *ch'essa taglia colla sua parte esteriore* MS.

Dal

Dal punto B tiro all' estremità del diametro SD le rette BS, BD, e dal punto P le rette PV, PN parallele a BS, BD; prolungo AB in Z, ed MP in X.

I triangoli simili ABD, MPN ci danno AB . AD :: MP . MN; e a cagione de' triangoli simili ABS, MPV abbiamo AB . AS :: MP . MV; moltiplicando dunque i termini di questa proporzione per quei della precedente, avremo $\overline{AB}^2$. AD × AS :: $\overline{MP}^2$. MN × MV : ma $\overline{AB}^2$ = AD × AS (*N.* 271.) ; onde $\overline{MP}^2$ = MN × MV. Così non si ha ch'a dimostrare essere MN × MV maggiore di MD × MS.

Ora nella Figura 193, l'angolo del segmento ABS vale la metà dell' arco BS (*N.* 253.), e l' angolo alla circonferenza SBH vale la metà dell'arco BH (*N.*252.) uguale all'arco SB, per essere il diametro SD perpendicolare alla corda (*N.* 224.) ; questi due angoli son dunque uguali: ora, l'angolo ABQ equivale al suo alterno BQP; però uguali sono gli angoli QBP, BQP, e nel triangolo isoscele BQP abbiamo BP = QP. Similmente, l'angolo del segmento ZBD equivale all'angolo alla circonferenza HBD; e poichè l'angolo ZBD uguaglia il suo alterno BXP, il triangolo BXP è isoscele, e ci dà BP = XP; onde XP = QP: così, essendo le tre linee MQ, MP, MX in progressione Aritmetica, poichè uguali sono le lor differenze XP, QP, la prima è minore per rapporto alla seconda, di quello sia la seconda per rapporto alla terza (*N.* 216.), cioè MQ . MP $<$ MP . MX: ma i triangoli simili MQS, MPV ci danno MQ . MP :: MS . MV, e ne' triangoli simili MPN, MXD abbiamo MP . MX :: MN . MD; dunque in MQ, MP $<$ MP, MX ponendo la ragione MS, MV in vece della sua uguale MQ, MP, e la ragione MN, MD invece della sua uguale MP, MX, avremo MS, MV $<$ MN, MD: ora, se questi quattro termini fossero in proporzione, il prodotto degli estremi sarebbe uguale a quello de' medj; non essendovi dunque proporzione in MS, poichè esso è proppo picciolo, il prodotto MS × MD degli estremi è minore del prodotto MN × MV de' medj, cioè del quadro di MP.

Conducendo nella Figura 194 le rette RS, BD, PV, PN, troveremo con somiglianti raziocinj $\overline{PM}^2$ = MV × MN; e soltanto s'avrà a provare, che MV × VN è maggiore di MS × MD: il che noi faremo prolungando SB in X, e DB in Q; imperocchè uguali

uguali essendo, come s'è veduto, gli angoli *a*BD, HBD, sono altresì uguali gli opposti a' vertici QBA, QBP, e poichè QBA equivale al suo alterno BQP, il triangolo BQP è isoscele, e ci dà PB = PQ. Così pure, uguali essendo gli angoli ABS, SBH, lo sono altresì gli opposti a' vertici *a*BX, XBP; e per essere l'angolo *a*BX uguale al suo alterno BXP, il triangolo BXP è isoscele, e ci dà PB = PX; dunque PQ = PX; e le tre linee MQ, MP, MX sono in progressione Aritmetica, il che ci dà MQ, MP ∻ MP, MX. Il rimanente della dimostrazione si terminerà come sopra.

CAPITOLO SETTIMO.

Dell' inscrizione nel circolo de' Poligoni regolari, e della loro circonscrizione al circolo.

307. UN Poligono regolare è *inscritto* nel circolo, quando tutt' i suoi angoli sono alla circonferenza di detto circolo; ed è *circonscritto*, quando tutti i suoi lati toccano la circonferenza.

308. PROBLEMA. *In un dato circolo* (Fig. 195.) *inscrivere un triangolo equilatero.*

Tirisi un diametro BD, e dividasi per mezzo in R la sua metà OD; quindi da R si conduca una corda AC perpendicolare al diametro, e dai termini A, C della stessa tirinsi all'estremità più lontana del diametro le rette AB, BC; il che ci dà'l triangolo equilatero ABC cercato.

Per ciò dimostrare, tiro la corda DC; retto essendo l'angolo alla circonferenza BCD (*N.* 252.), il triangolo BCD sarà rettangolo; e a cagione della perpendicolare CR abbiamo RD. DC : : DC. DB (*N.*170.): ora, per la costruzione, RD = $\frac{1}{4}$DB; dunque $\frac{1}{4}$DB. DC : : DC. DB; donde ci deduce $\frac{1}{4}\overline{DB}^2 = \overline{DC}^2$, ed estraendo la radice quadra s'avrà $\frac{1}{2}$DB = DC, cioè DC è doppio di RD: ma i triangoli simili DRC, BRC ci danno DR, DC : : RC. BC. Dunque BC è doppio di RC, come CD lo è di RD: ora AC è parimente doppio di RC (*N.* 224.); e però BC = AC: ma BC = BA, per essere BD perpendicolare sul mez-

ful mezzo di AC (*N. 56.*) ; onde uguali fono i tre lati AB, BC, AC del triangolo ABC.

309. COROLLARIO. *Il lato dell' esagono inscritto nel circolo è uguale al raggio.*

L'arco ADC è segato per mezzo dal diametro BD perpendicolare al lato AC del triangolo equilatero ABC inscritto nel circolo; così l'arco DC è la festa parte della circonferenza, e la corda DC di detto arco si è 'l lato dell'esagono, ch'inscritto sarebbe nel circolo. Ora abbiamo trovato DC = $\frac{1}{2}$DB = OD. Dunque, ec.

310. COROLLARIO. *A un dato circolo* ABC (Fig. *196.*) *circonscrivere un triangolo equilatero.*

Tiro 'l diametro, ch'io prolungo d'ambe le parti, facendo RM = RO, ed AN = AO; col centro O, e coll'intervallo, o sia raggio ON descrivo un circolo NQMP; dal punto A tiro la corda PQ perpendicolare sopra MN, e da' punti P, Q tiro le rette PM, QM, le quali con PQ formano il triangolo cercato.

Imperocchè, essendo OA = NA, si mostrerà come sopra (*N.* 308.), ch'il triangolo PQM è equilatero, ed inscritto nel circolo PNQM; così, uguali essendo le corde PQ, QM, MP, le perpendicolari OA, OB, OC, tirate dal centro O sopra dette corde, saranno uguali: ora la perpendicolare OA si è 'l raggio del dato circolo ABC; dunque la circonferenza di questo stesso circolo passa per gli altri punti B, C; e i tre lati PQ, QM, MP del triangolo lo toccano nei tre punti A, B, C.

311. PROBLEMA. *Dato un circolo inscrivervi, e circonscrivervi un quadrato* (Fig. 197.).

Tiro due diametri AC, BD, che si segano ad angoli retti, e congiungo i loro termini colle rette AB, BC, CD, DA, che formano il quadro inscritto ricercato; poichè queste quattro rette sostenendo archi uguali, sono anch'esse uguali, e tutti gli angoli ABC, BCD, ec. son retti, perocchè ciascuno d'essi abbraccia una semicirconferenza.

Dall'estremità A, B, C, D de' due diametri tiro delle tangenti, le quali segandosi fra loro formano un quadrato HMNR circonscritto al circolo; poichè, essendo le rette HM, RN perpendicolari a BD, son parallele ad AC, e per essere le stesse contenute fra le rette HR, MN perpendicolari sopra AC, uguali sono ad AC; per la medesima ragione, le rette HR, MN son parallele, ed uguali a BD: così, uguali essendo fra loro i quattro lati HM, MN, ec. della figura HMNR, e retti gli angoli da essi formati, questa figura è un quadro.

312. PRO-

312. PROBLEMA. *Dato un circolo inscrivervi, e circonscriverv vi un' esagono* (Fig. 198.).

Sopra la circonferenza da A in B, da B in C, ec. porto il raggio OA, e colle rette AB, BC, ec. congiugnendo i punti di divisione, ho l'esagono inscritto ABCDEF; il ch'è evidente pel numero 309.

A ciascun vertice A, B, C, ec. degli angoli dell' esagono inscritto tiro delle tangenti al circolo, le quali segandosi formano l'esagono circonscritto GHLMNR; poichè, uguali essendo le corde AB, AF, e i loro archi, tutti gli angoli del segmento HAB, HBA, GAB, GFA sono fra loro uguali; onde n' avviene, ch'i triangoli isosceli FGA, AHB son perfettamente uguali; perciò anche gli altri triangoli isosceli BLC, CMD, DNE, ERF sono uguali fra loro, e ai due precedenti FGA, AHB: così, essendo i lati della figura circonscritta composti ciascuno dei due lati uguali di essi triangoli isosceli, sono fra loro uguali, non meno che gli angoli, i quali da detti lati vengon formati; e però la figura è un' esagono circonscritto.

313. AVVERTIMENTO. Quando un poligono è inscritto in un circolo, puossi sempre ad esso circolo circonscrivere un poligono simile, nello stesso modo che circonscrivesi un'esagono.

314. PROPOSIZIONE LXXXV. *Il quadro del lato del pentagono inscritto in un circolo equivale alla somma de' quadri del lato dell' esagono e di quello del decagono inscritti nello stesso circolo.*

Sia AB (*Fig.* 199.) il lato del pentagono; divido per mezzo il suo arco in C, e le corde AC, CB sono uguali ciascuna al lato del decagono; tiro i raggi AO, BO, ciascuno de' quali equivale al lato dell' esagono; dal centro O tiro sopra AC la perpendicolare OR, che divide per mezzo l' arco AC, e la sua corda (*N.*224.): così, tirando SC, il triangolo ASC è isoscele, e simile al triangolo isoscele ACB, a cagione dell' angolo comune CAB; dunque AS. AC : : AC. AB; e quind' io deduco AS $\times$ AB = $\overline{AC}^2$.

L'angolo SOB abbraccia i tre quarti dell'arco del pentagono, e vale in conseguenza 54 gradi, poichè l' arco del pentagono ne vale 72: ora, essendo l' angolo ABO l'uno degli angoli sopra la base del pentagono, vale parimente 54 gradi; il triangolo SOB è dunque isoscele, e simile al triangolo OAB, a cagione dell'angolo comune SBO: così SB. BO : : BO. AB; quind' io deduco SB

$\times AB = \overline{BO}^2$, e aggiugnendo ciascun membro di questa equazione a ciascun membro della precedente $AS \times AB = \overline{AC}^2$, ho $AS \times AB + SB \times AB = \overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$: ora, $AS \times AB + SB \times AB = AB \times \overline{AS + SB}$, ed $AS + SB = AB$; dunque $AB \times AB$, o $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$.

315. PROPOSIZIONE LXXXVI. *Il lato* AB *del decagono inscritto in un circolo* (Fig. 200.) *equivale alla mediana* OR *del raggio* OB *diviso in estrema, e media ragione.*

Nel decagono, l' arco AB è la decima parte della circonferenza, e però ei vale 36 gradi; dunque dall' estremità A, B conducendo i raggi AO, BO, l' angolo AOB vale 36 gradi, e ciascuno degli altri due OAB, OBA del triangolo isoscele OBA ne vale 72, ed è'l doppio dell'angolo AOB del vertice: ora in ogni triangolo isoscele, di cui ciascun' angolo alla base è doppio dell'angolo al vertice, la base AB equivale alla mediana del lato OB diviso in estrema, e media ragione (*N.* 196.). Dunque, ec.

316. PROBLEMA. *In un dato circolo inscrivere un decagono* (Fig. 201.).

Conduco un diametro AB; dal centro O alzo'l raggio OC perpendicolare sopra AB; taglio per mezzo in R il raggio AO; quindi preso per centro il punto R, con un raggio uguale alla distanza RC descrivo l' arco CH, che in H taglia il raggio OB, e la retta OH sarà 'l lato del decagono: così, portando questo lato dieci volte sopra la circonferenza, io avrò'l decagono.

Imperocchè, per la costruzione, se portassi OH sopra 'l raggio CO da O in S, sarebbe detto raggio segato in S in estrema e media ragione, e la retta SO sarebbe la sua mediana (*N.* 190.); essendo dunque SO, od OH la mediana del raggio segato in estrema e media ragione, egli esser dee il lato del decagono (*N.* 315.).

317. COROLLARIO. *Qualunque linea* AH, *composta del lato* AO *dell'esagono, e del lato* OH *del decagono, è divisa in estrema e media ragione in* O.

Se sopra AO io portassi OH, il raggio AO sarebbe diviso in estrema e media ragione, ed OH sarebbe la sua mediana; se dunque allo stesso raggio AO s' aggiugne la sua mediana, l' intera linea AH è altresì divisa in estrema, e media ragione (*N.* 191.).

318. PRO-

318. PROBLEMA. *In un dato circolo inscrivere un pentagono* (Fig. 201.).

Opero prima come nel precedente Problema; e poi dal punto C al punto H conduco la retta CH, ch'è 'l lato del pentagono, che si cerca.

Imperocchè il triangolo rettangolo COH ci dà $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OH}^2$ (*N.* 171.) : ma CO è 'l lato dell' esagono, ed OH quello del decagono; dunque CH esser dee il lato del pentagono (*N.* 314.).

319. PROBLEMA. *In un dato circolo inscrivere un quindecagono, cioè una figura di* 15 *lati* (Fig. 202.).

Nel dato circolo inscrivo un pentagono ABCDE, e un triangolo equilatero LDH, il cui vertice D d'uno degli angoli sia lo stesso che 'l vertice D di uno degli angoli del pentagono; e la corda AL sarà 'l lato del quindecagono ricercato: il che io provo nel seguente modo.

Da D conduco il diametro DM, che sega per mezzo il circolo, e ciascuno de' due poligoni: così, essendo 'l lato AB del pentagono e 'l lato LH del triangolo segati ciascuno per mezzo da DM, son perpendicolari sopra DM, e fra loro paralleli; dunque AL = BH (*N.* 263.) : ora, essendo l' arco AB del pentagono di 72 gradi, la sua metà AM è di 36; ed essendo l'arco LMH del triangolo di 120 gradi, la sua metà LM è di 60; onde, dall' arco LM levando l'arco AM, il residuo AL sarà di 24 gradi: così, dividendo per 24 il valore 360 dell'intera circonferenza, il quoziente 15 mostrerà, che l' arco AL è contenuto 15 volte nella circonferenza. Dunque, ec.

320. AVVERTIMENTO. Se in due parti uguali seganfi gli archi de' poligoni ritrovati, s' avranno de' poligoni d'un numero doppio di lati. P. e. il quadrato ci darà l' ottagono, e questo il poligono di 16 lati; e così successivamente. Ma per i poligoni di 7, 9, 11 lati, ec. convien necessariamente ricorrere alla Geometria composta, e ciò ch'ella c' insegna, non è sì facile a porsi in pratica. Alcuni per dir vero esibiscono Metodi d' approssimazione, ed altri insegnano a costruire delle curve, ch' appellansi *Quadratrici*, col cui mezzo e'pare, ch'agevolmente inscriver si possa qualunque poligono: tuttavolta, siccome sempre l' approssimazioni sono imperfette, e le quadratrici poco esatte, perocchè dovendo elle esser descritte da più punti non è possibile

Xx 2. ri-

ritrovarli assolutamente tutti; così la più certa, a mio giudizio, si è d' andar a tentone, finchè s' abbia esattamente ritrovato il poligono, che si cerca, o di servirsi del compasso di proporzione, come insegneremo; il ch' è ancora meglio.

FINE DEL TOMO PRIMO.

TA-

TAVOLA

DE' CAPITOLI E DE' TITOLI

CONTENUTI IN QUESTO PRIMO VOLUME.

LIBRO PRIMO,

Che contiene gli Elementi dell' Aritmetica, e dell' Algebra.

Dell'

LIBRO SECONDO,

Che contiene gli Elementi della Geometria Teorica e Pratica delle Linee, delle Superficie e de' Solidi, della Trigonometria, delle Sezioni Coniche, della Misura delle Muraglie e de' Legni, e del Calcolo delle Frazioni Decimali.

IL FINE.

ERRATA

ERRATA	CORRIGE.
Pag. 4.lin.28. non	leg. o non
Pag. 15.lin. 8. , che	leg. ; il che
Pag. 49.lin.14. un' *a*	leg. meno un' *a*
Pag. 53.lin. 5. otto	leg. ſotto
Pag. 77.lin. 7. $\frac{ab}{bd}$	leg. $\frac{cb}{bd}$
Pag. 93.lin. 8. uguale *a*	leg. uguale a
Pag. 96.lin.30. $a - bb$	leg. $a - bb$
Pag. 104.lin.35. o ſe	leg. o
Pag. 130.lin.30. $x - 2$	leg. $x + 2$
Pag. 142.lin. 5. che	leg. che era
Pag. 155.lin.17. $\frac{1}{bx}$	leg. $\frac{1}{6x}$
ivi. lin.penult. ch'eſſi	leg. che ſi
Pag. 158.lin.13. le di	leg. palle di
Pag. 172.lin.15. delle perdite	leg. le perdite
Pag. 173.lin.21. delle perdite	leg. le perdite
Pag. 182.lin. 6. l' eſpoſitore	leg. che l' eſpoſitore
Pag. 183.lin.22. in ſe	leg. , ſe
Pag. 235.lin.17. C	leg. (
Pag. 279.lin.30. DAE; ad arbitrio	leg. DAE ad arbitrio ;
Pag. 291.lin.38. date ſono	leg. date
Pag. 301.lin.22. angoli , :	leg. angoli ;